9

Tipos de movimientos

TIPOS DE MOVIMIENTOS

RECUERDO LO QUE SÉ

- ¿Qué tipos de movimientos conoces? ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

  Respuesta abierta. De los estudiados en cursos anteriores: MRU, MRUA, MCU y MCUA.

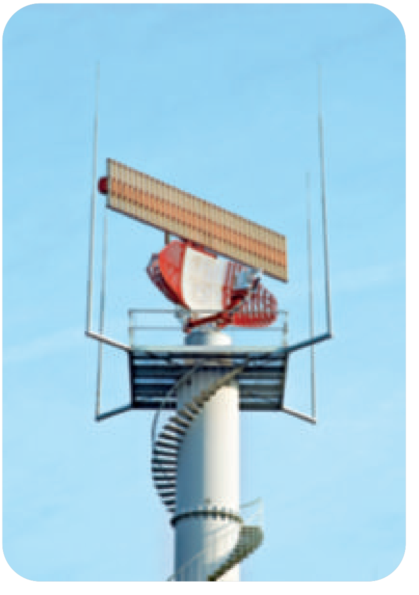
- ¿Todos los movimientos tienen aceleración? Explica tu respuesta.

  Solo el MRU no tiene aceleración. La aceleración mide el cambio de velocidad durante un tiempo. Así, si se cambia la celeridad (módulo de la velocidad) o la dirección de la velocidad, entonces hay aceleración.

- ¿Qué quiere decir que un movimiento es circular y uniforme? Pon ejemplos para avalar tu respuesta.

  Que el móvil tarda tiempos iguales en recorrer ángulos iguales. Las agujas de un reloj mecánico son ejemplo de este tipo de movimiento.

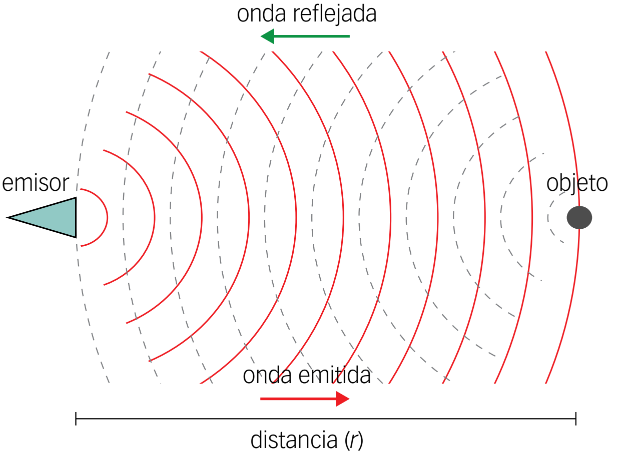
INTERPRETO LA IMAGEN



En las torres de control de los aeropuertos hay radares, imprescindibles para gestionar el tráfico aéreo.

- ¿Cómo funciona un radar? Elabora un esquema explicándolo. Piensa en el modo en que funciona el sonar, pero ten en cuenta que el radar usa ondas de radio en vez de ondas de sonido.

  Su funcionamiento se basa en la emisión de ondas electromagnéticas que se reflejan al chocar con el obstáculo (objetivo), regresando a la fuente de emisión. Estas ondas se desplazan a la velocidad de la luz (299 792 km/s), y midiendo el tiempo que tardan en ir y volver es posible calcular la distancia al obstáculo. En un sonar se realiza con ondas sonoras.



- ¿Cuánto tarda en recibir una señal un radar que detecta un avión situado a 60 km de distancia?

Teniendo en cuenta la velocidad de la luz, hallamos el tiempo:

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow t = \frac{e}{v} = \frac{60\ \cancel{\text{km}}}{299\,792\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\text{s}}} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

ACTIVIDADES

1 Halla el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

- Dominio: El radicando tiene que ser un número mayor o igual que cero:

  $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x + 3) \geq 0$, es decir, el dominio es el intervalo $\mathbf{(-\infty, -3] \cup [+3, +\infty)}$.

- Recorrido: La raíz puede ser positiva o negativa. Para que sea función, a cada x le debe corresponder una única y; escogemos, por ejemplo, los valores positivos de la raíz y el recorrido es el intervalo $\mathbf{[0, +\infty)}$.

2 Expresa en radianes y revoluciones los siguientes ángulos:

a) 720° b) 270° c) 90°

Convertimos los ángulos, expresados en grados, a radianes:

a) $720° \cdot \dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = \dfrac{720° \cdot 2\pi}{360°}\ \text{rad} = \mathbf{4\pi\ rad}$

b) $270° \cdot \dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = \dfrac{270° \cdot 2\pi}{360°}\ \text{rad} = \mathbf{\dfrac{3\pi}{2}\ rad}$

c) $90 \cdot \dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = \dfrac{90° \cdot 2\pi}{360°}\ \text{rad} = \mathbf{\dfrac{\pi}{2}\ rad}$

Convertimos los ángulos a revoluciones:

a) $720° \cdot \dfrac{1\ \text{rev}}{360°} = \dfrac{720°}{360°}\ \text{rev} = \mathbf{2\ rev}$

b) $270° \cdot \dfrac{1\ \text{rev}}{360°} = \dfrac{270°}{360°}\ \text{rev} = \mathbf{0{,}75\ rev}$

c) $90° \cdot \dfrac{1\ \text{rev}}{360°} = \dfrac{90°}{360°}\ \text{rev} = \mathbf{0{,}25\ rev}$

3 Una piedra se deja caer y tarda 2,5 s en llegar al suelo. Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

a) ¿Qué tipo de movimiento lleva?

b) ¿Cuál es la velocidad con la que llega al suelo?

c) Calcula el espacio recorrido.

a) Lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) bajo la aceleración de la gravedad.

b) Escribimos la ecuación de la velocidad de un MRUA, sustituimos los valores dados y operamos:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 - 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}5\ \text{s} = \mathbf{-24{,}5\ m/s}$$

El signo indica que se mueve hacia abajo, como no podía ser de otra manera en un ejemplo de caída libre.

c) Escribimos la ecuación de la posición de un MRUA:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

El espacio recorrido será el valor absoluto de la diferencia entre su posición final y su posición inicial. Sustituimos los valores conocidos y operamos:

$$|y - y_0| = \left| v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right| = \left| 0 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2{,}5\ \text{s})^2 \right| = \mathbf{30{,}6\ m}$$

4 Un coche de juguete da una vuelta a un circuito circular de 2 m de radio cada 20 segundos.

a) Calcula su velocidad angular.

b) ¿Qué espacio recorre durante un minuto?

a) El coche da una vuelta cada 20 s. Como 1 vuelta = 2π rad, su velocidad angular es:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{20\ \text{s}} = \mathbf{0{,}1\pi\ rad/s}$$

b) Para calcular el espacio recorrido en primer lugar calculamos el ángulo de giro en dicho tiempo:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = 0{,}1\pi \frac{\text{rad}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 60\ \cancel{\text{s}} = \mathbf{6\pi\ rad}$$

Sustituimos y tenemos que el espacio que recorre en un minuto es:

$$s = \Delta\theta \cdot R = 6\pi\ \text{rad} \cdot 2\ \text{m} = 12\pi\ \text{m} = \mathbf{37{,}7\ m}$$

5 La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\vec{i}$, y su velocidad, $\vec{v} = 2\vec{i}$. Calcula la ecuación del vector posición y escribe en forma escalar la ecuación del MRU.

Escribimos el vector posición:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \Rightarrow \vec{r}(t) = 2\vec{i} + 2\vec{i} \cdot t \Rightarrow \boldsymbol{\vec{r}(t) = (2 + 2t)\,\vec{i}}$$

Como el vector posición solo tiene componente en el eje X, podemos escribir:

$$x = x_0 + v \cdot t \Rightarrow \boldsymbol{x(t) = 2 + 2 \cdot t\ \text{m}}$$

6 La velocidad de un barco es de 40 nudos. Sabiendo que un nudo corresponde a una velocidad de 1 milla náutica/h y que una milla náutica equivale a 1,852 km, calcula la velocidad del barco en m/s.

Aplicamos factores de conversión para cambiar de unidades:

$$v = 40\ \text{nudos} = 40 \frac{\cancel{\text{millas}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1{,}852\ \cancel{\text{km}}}{1\ \cancel{\text{milla}}} \cdot \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = \mathbf{20{,}5\overset{\frown}{7}\ m/s}$$

7 La ecuación de movimiento de un ciclista durante una contrarreloj es la siguiente:

$$x(t) = 45 \cdot t$$

(El espacio se expresa en km, y el tiempo, en horas).

a) Compara con la ecuación del MRU. ¿Cuál es el valor de x_0?

b) ¿Cuál es la velocidad del ciclista? Expresa el resultado en km/h y en m/s.

c) ¿Cuánto tiempo emplea en recorrer 55 km?

a) La ecuación del MRU en forma escalar es $x(t) = x_0 + v \cdot t$. Por tanto:

$$x_0 = \mathbf{0\ km}$$

b) La velocidad del ciclista en km/h será:

$$v = \mathbf{45\,\frac{km}{h}}$$

Pasando las unidades de la velocidad a m/s:

$$v = 45\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3\,600\ \text{s}} = \mathbf{12{,}5\,\frac{m}{s}}$$

c) Hallamos el tiempo que tarda el ciclista en recorrer 55 km:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t \;\Rightarrow\; x(t) = 45 \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{55\ \cancel{\text{km}}}{45\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}}} = 1{,}\widehat{2}\ \text{h}$$

$$t = 1{,}\widehat{2}\ \text{h} = 1\text{h} + 0{,}\widehat{2}\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 1\text{h} + 13{,}\widehat{3}\ \text{min}$$

$$t = 1\text{h} + 13\ \text{min} + 0{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = \mathbf{1\,h} + \mathbf{13\,min} + \mathbf{20\,s}$$

8 La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$ m; su velocidad inicial, $\vec{v}_0 = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m/s; y la aceleración, $\vec{a} = 0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$ m/s^2.

a) Calcula la velocidad y la posición en los instantes $t_1 = 1$ s y $t_2 = 2$ s.

b) Representa en un diagrama cartesiano las tres posiciones y, en cada posición, su vector velocidad.

c) ¿Corresponde a un movimiento con aceleración uniforme? ¿Es rectilíneo?

a) Escribimos los vectores posición y velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \;\Rightarrow\; \vec{r}(t) = 2\,\vec{i} + (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}) \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \;\Rightarrow\; \vec{v}(t) = (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}) + (0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}) \cdot t$$

Agrupamos por componentes:

$$\vec{r}(t) = (2 + 3 \cdot t + 0{,}15 \cdot t^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot t + 0{,}4 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (3 + 0{,}3 \cdot t)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot t)\,\vec{j}$$

Calculamos la posición para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{r}_1(t = 1\ \text{s}) = (2 + 3 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 1^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 1^2)\,\vec{j} = \mathbf{5{,}15\,\vec{i} - 3{,}6\,\vec{j}\ m}$$

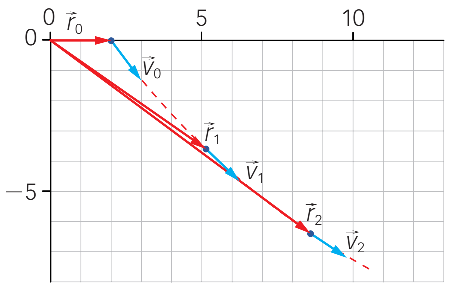
$$\vec{r}_2(t = 2\ \text{s}) = (2 + 3 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 2^2)\,\vec{j} = \mathbf{8{,}6\,\vec{i} - 6{,}4\,\vec{j}\ m}$$

Análogamente, calculamos la velocidad para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{v}_1(t = 1\ \text{s}) = (3 + 0{,}3 \cdot 1)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot 1)\,\vec{j} = \mathbf{3{,}3\,\vec{i} - 3{,}2\,\vec{j}\ m/s}$$

$$\vec{v}_2(t = 2\ \text{s}) = (3 + 0{,}3 \cdot 2)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot 2)\,\vec{j} = \mathbf{3{,}6\,\vec{i} - 2{,}4\,\vec{j}\ m/s}$$

b)



c) No es rectilíneo, ya que su trayectoria no es una línea recta. Es uniformemente acelerado, ya que $\vec{a}$ = cte., no depende del tiempo.

9 La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$ m; su velocidad inicial, $\vec{v}_0 = 2\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j}$ m/s; y la aceleración, $\vec{a} = 0{,}4\,\vec{i} + 0{,}3\,\vec{j}$ m/s^2.

a) Calcula la velocidad y la posición en los instantes $t_1 = 1$ s y $t_2 = 2$ s.
b) Representa en un diagrama cartesiano las tres posiciones y, en cada posición, su vector velocidad.
c) ¿Corresponde a un movimiento con aceleración uniforme? ¿Es rectilíneo?

a) Escribimos los vectores posición y velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \Rightarrow \vec{r}(t) = 2\,\vec{i} + (2\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0{,}4\,\vec{i} + 0{,}3\,\vec{j}) \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \Rightarrow \vec{v}(t) = (2\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j}) + (0{,}4\,\vec{i} + 0{,}\,\vec{j}) \cdot t$$

Agrupamos:

$$\vec{r}(t) = (2 + 2 \cdot t + 0{,}2 \cdot t^2)\,\vec{i} + (1{,}5 \cdot t + 0{,}15 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (2 + 0{,}4 \cdot t)\,\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot t)\,\vec{j}$$

Calculamos la posición para los instantes $t_1 = 1$ s; y $t_2 = 2$ s:

$$\vec{r}_1(t = 1\text{ s}) = (2 + 2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 1^2)\,\vec{i} + (1{,}5 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 1^2)\,\vec{j} = \mathbf{4{,}2\,\vec{i} + 1{,}65\,\vec{j}\text{ m}}$$

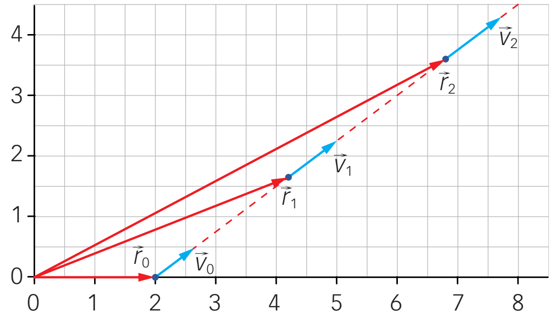
$$\vec{r}_2(t = 2\text{ s}) = (2 + 2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2^2)\,\vec{i} + (1{,}5 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2)\,\vec{j} = \mathbf{6{,}8\,\vec{i} + 3{,}6\,\vec{j}\text{ m}}$$

Análogamente, calculamos la velocidad para los instantes $t_1 = 1$ s; y $t_2 = 2$ s:

$$\vec{v}_1(t = 1\text{ s}) = (2 + 0{,}4 \cdot 1)\,\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot 1)\,\vec{j} = \mathbf{2{,}4\,\vec{i} + 1{,}8\,\vec{j}\text{ m/s}}$$

$$\vec{v}_2(t = 2\text{ s}) = (2 + 0{,}4 \cdot 2)\,\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot 2)\,\vec{j} = \mathbf{2{,}8\,\vec{i} + 2{,}1\,\vec{j}\text{ m/s}}$$

b)



c) Su trayectoria es una línea recta y $\vec{a}$ = cte. Se trata de un MRUA.

10 Una conductora circula a una velocidad de 90 km/h y observa un obstáculo en la calzada. Justo en ese momento pisa el freno, lo que proporciona al vehículo una deceleración constante de 1,5 m/s^2. Calcula la distancia desde su vehículo hasta el obstáculo si se detiene justo ante él al cabo de 10 s.

Es un movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado. Expresamos la velocidad inicial en m/s:

$$v_0 = 90\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aplicando la ecuación de la posición del MRUA:

$$x = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = 0 + 25\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\cdot 10\ \cancel{\text{s}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-1{,}5\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}^2}}\right)\cdot(10\ \cancel{\text{s}})^2 = \mathbf{175\ m}$$

11 Un móvil se desliza sobre una superficie horizontal a una velocidad de 5 m/s. Sobre este móvil actúa una fuerza de rozamiento, que lo frena con una aceleración de 0,5 m/s^2. Calcula la velocidad después de recorrer 8 m y el espacio que recorre hasta pararse.

Es un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado. La velocidad después de recorrer 8 m se puede calcular con la ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2\cdot a\cdot\Delta x \;\Rightarrow\; v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta x$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta x} = \sqrt{\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2\cdot 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 8\ \text{m}} = \mathbf{4{,}12\,\frac{m}{s}}$$

Como cuando se pare $v = 0$, hallamos el tiempo que tarda en pararse con la ecuación:

$$v = v_0 + a\cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 5\frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}}}{-0{,}5\frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}^{\cancel{2}}}} = 10\ \text{s}$$

El espacio recorrido hasta pararse es:

$$x = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = 0 + 5\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\cdot 10\ \cancel{\text{s}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-0{,}5\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}^2}}\right)\cdot(10\ \cancel{\text{s}})^2 = \mathbf{25\ m}$$

12 Al hacer un tiro en suspensión, un jugador de baloncesto lanza un balón desde el aire:

a) ¿Qué debe hacer un jugador de baloncesto para estar el máximo tiempo posible en el aire?

b) Si un jugador puede estar 0,6 s en el aire y sube unos 44 cm, ¿cuál es su velocidad de salto?

a) Se trata de un lanzamiento vertical. El tiempo que está en el aire depende solo de la velocidad vertical en el momento del salto, y es independiente de la velocidad horizontal (velocidad a la que corre). Lo que debe hacer es **impulsarse lo máximo posible hacia arriba**.

b) La ecuación del movimiento en vertical del jugador es:

$$y = y_0 + v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Haciendo $y = 0$ y sustituyendo t por 0,6 s (tiempo que tarda en subir y bajar) se calcula v_0:

$$0 = 0 + v_0 \cdot t \cdot - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t)^2 \Rightarrow \left(v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t\right) \cdot t = 0 \Rightarrow v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t = 0$$

$$v_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}6\ \text{s} = \mathbf{2{,}94\ m/s}$$

13 Se deja caer una pelota desde la azotea de un edificio de 44 m de altura:

a) Calcula el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.

b) ¿Con qué velocidad (expresada en km/h) llega al suelo la pelota?

a) Se trata de un movimiento de caída libre desde el reposo. La ecuación del movimiento tomando el origen de coordenadas en la superficie de la Tierra es:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Cuando la pelota llega al suelo $y = 0$:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 44\ \cancel{\text{m}}}{9{,}8\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}} = \mathbf{3\ s}$$

b) La velocidad con la que llega al suelo será:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 3\ \text{s} = \mathbf{-29{,}4\ m/s}$$

Expresamos la velocidad en km/h:

$$v_0 = -29{,}4\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1000\ \cancel{\text{m}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \text{h}} = -\mathbf{106\ \frac{km}{h}}$$

14 Una futbolista chuta hacia la portería con una velocidad inicial de 17 m/s y un ángulo de tiro con la horizontal de 45°. Calcula:

a) El alcance máximo.

b) El tiempo de vuelo.

a) Alcance: $x_{\text{máx}} = \dfrac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 2\alpha}{g} = \dfrac{(17\ \text{m/s})^2 \cdot \text{sen}\ 90°}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{29{,}5\ m}$

b) Tiempo de vuelo: $t_{\text{vuelo}} = \dfrac{2\, v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha}{g} = \dfrac{2 \cdot 17\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ 45°}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{2{,}45\ s}$

15 Contesta:

a) ¿Con qué velocidad hay que lanzar un balón de fútbol para que, si lo golpeamos con un ángulo de 45° respecto a la horizontal, llegue al otro extremo de un campo de 100 m de largo?

b) Cuando el balón va por el aire, ¿a qué distancia horizontal del punto de lanzamiento estaría el balón a 1,80 m por encima del suelo?

a) A partir de la ecuación del alcance con $\alpha = 45°$:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 90^{\text{O}}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \Rightarrow v_0^2 = g \cdot x_{\text{máx}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{g \cdot x_{\text{máx}}}$$

Sustituyendo los valores conocidos y operando:

$$v_0 = \sqrt{g \cdot x_{\text{máx}}} = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 100\ \text{m}} = \mathbf{31{,}30\ m/s}$$

b) Hay dos puntos a 1,80 m del suelo. Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t;\ y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Sustituimos en la segunda ecuación y por 1,80 m y v_0 por 31,30 m/s:

$$1{,}80\ \text{m} = 31{,}30\ \text{m/s} \cdot \operatorname{sen} 45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

Es una ecuación de segundo grado con la incógnita en t, resulta:

$$t_1 = 0{,}083\ \text{s y } t_2 = 4{,}43\ \text{s}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación del movimiento del eje X:

$$x_1 = 31{,}30\ \text{m/s} \cdot \cos 45° \cdot 0{,}083\ \text{s} = \mathbf{1{,}83\ m}$$
$$x_2 = 31{,}30\ \text{m/s} \cdot \cos 45° \cdot 4{,}43\ \text{s} = \mathbf{98{,}17\ m}$$

La suma de x_1 y x_2 es 100 m, como debe ser. Ambos puntos se encuentran a 1,83 m del origen y del final de la trayectoria.

16 Una bola que rueda sobre una mesa con una velocidad de 0,5 m/s cae hacia el suelo al llegar al borde. Si la altura de la mesa es de 80 cm, calcula:

a) El tiempo que tarda en caer.

b) La distancia horizontal recorrida desde la vertical de la mesa hasta el punto en el que la bola choca con el suelo.

a) Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot t;\ y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Haciendo $y = 0$ m despejamos t y calculamos el tiempo que tarda en caer:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}80\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{0{,}40\ s}$$

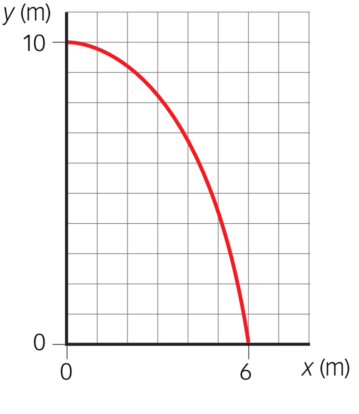
b) La distancia recorrida es:

$$x = v_0 \cdot t = 0{,}5\ \text{m/s} \cdot 0{,}40\ \text{s} = \mathbf{0{,}20\ m}$$

17 Se lanza horizontalmente una pelota desde un balcón a 10 m de altura sobre el suelo y cae a 6 metros de la vertical de la terraza.

a) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

b) ¿Con qué velocidad se lanzó?



a) Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot t;\ y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \text{(origen en el suelo)}$$

De la segunda, al sustituir y por 0 m se obtiene el tiempo que tarda en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{1{,}43\ s}$$

b) De la primera, despejamos v_0 y sustituimos los valores conocidos:

$$x = v_0 \cdot t \Rightarrow v_0 = \frac{x}{t} = \frac{6\ \text{m}}{1{,}43\ \text{s}} = \mathbf{4{,}2\ m/s}$$

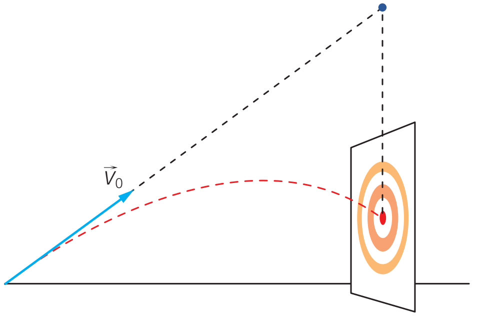
18 Queremos clavar un dardo en una diana cuyo centro está por encima de nuestra mano al lanzar.

a) ¿Debemos apuntar directamente al blanco?

b) ¿Más arriba? ¿Más abajo? ¿Por qué?

a) No, porque el dardo, según recorre distancias horizontales, también está afectado en vertical por la gravedad. Mientras se desplaza en el eje horizontal, estará cayendo en el eje vertical.

b) Hay que apuntar más arriba, de forma que impacte en un punto inferior al que se apunta. Todo ello se puede comprobar a partir de las ecuaciones del movimiento y la figura.



$$x = v_{0x} \cdot t;\ y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

19 Tiran una pelota desde un balcón a 10 m de altura con velocidad inicial de 18 km/h y ángulo de 15° por debajo de la horizontal. ¿Cuándo y dónde llega al suelo? ¿Y si se lanza con ángulo de 15° por encima de la horizontal?

Convertimos el valor de la velocidad a unidades del sistema internacional:

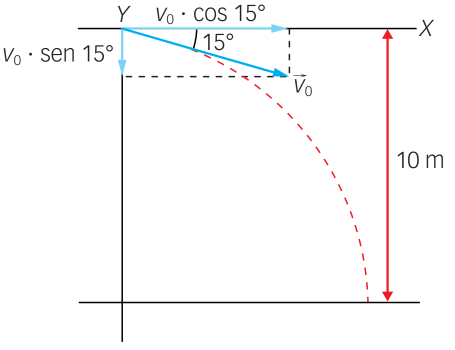
$$v = 18\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ecuación del movimiento de la pelota según el eje Y:

$$y = h - v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Al sustituir y por 0 m se consigue una ecuación de segundo grado:

$$0 = 10\ \text{m} - 5\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\, 15° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$



Operando los coeficientes queda una ecuación con la incógnita en el tiempo, t:

$$4{,}9\,t^2 + 1{,}29\,t - 10 = 0$$

Al resolver la ecuación quedan dos soluciones, solo una de ellas válida:

$$t = \frac{-1{,}29 \pm \sqrt{1{,}29^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-10)}}{2 \cdot 4{,}9} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{-1{,}29 + 14{,}06}{9{,}8} = \mathbf{1{,}3\ s} \\ t_2 = \dfrac{-1{,}29 - 14{,}06}{9{,}8} = -1{,}57\ \text{s} \end{cases}$$

Ecuación del movimiento de la pelota según el eje X:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t = 5\ \text{m/s} \cdot \cos 15° \cdot 1{,}3\ \text{s} = \mathbf{6{,}3\ m}$$

Si se lanza con ángulo de 15° por encima de la horizontal, la ecuación de movimiento según el eje Y es ahora:

$$y = h + v_0 \cdot \text{sen}\, \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

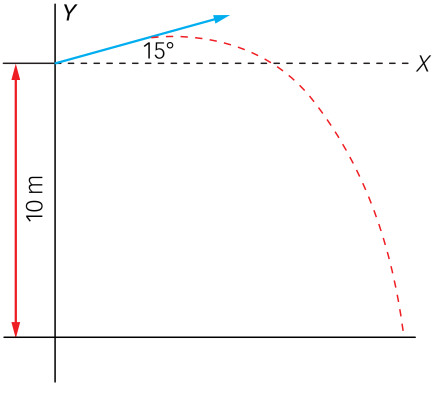
Al sustituir y por 0 m se obtiene el tiempo en llegar al suelo:

$$0 = 10\ \text{m} + 5\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\, 15° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

$$4{,}9\,t^2 - 1{,}29\,t - 10 = 0 \Rightarrow t = \mathbf{1{,}6\ s}$$

Y al sustituir en la ecuación del movimiento de la pelota según el eje X:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t = 5\ \text{m/s} \cdot \cos 15° \cdot 1{,}6\ \text{s} = \mathbf{7{,}6\ m}$$



20 Si una jugadora de baloncesto lanza un tiro libre con un ángulo de 30° respecto a la horizontal desde una altura de 2,20 m sobre el suelo, ¿con qué velocidad ha de lanzar la pelota sabiendo que la distancia horizontal del punto de tiro al aro es de 5 m y que este está a 3,05 m de altura?

Las ecuaciones del movimiento de la pelota son:

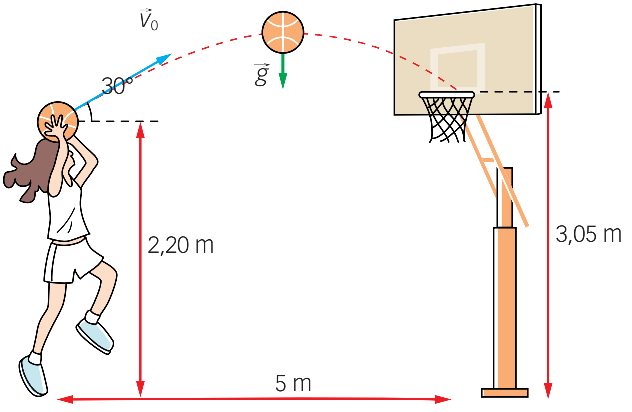
$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t;\ y = h + v_0 \cdot \text{sen}\, \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Se despeja t de la primera:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

Y al sustituir t en la segunda se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = h + \cancel{v_0} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 = h + x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$



Se despeja v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot (h + x \cdot \operatorname{tg}\alpha - y)}}$$

Sustituimos los valores conocidos y por 3,05 m, h por 2,2 m, x por 5 m, g por 9,8 m/s^2, y α por 30º. Operamos para conocer la velocidad inicial.

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (5\ \text{m})^2}{2 \cdot \cos^2 30° \cdot (2{,}2\ \text{m} + 5\ \text{m} \cdot \operatorname{tg} 30° - 3{,}05\ \text{m})}} = \mathbf{8{,}96\ \frac{m}{s}}$$

21 Si se desprecia la resistencia del aire, ¿existen diferencias entre la trayectoria de proyectiles diferentes (por ejemplo, una pelota de golf o un coche)?

No. Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria será la misma si solo cambiamos el proyectil.

22 ¿Y si se tiene en cuenta la resistencia del aire? ¿Influye el tipo de proyectil en la trayectoria si la velocidad inicial y el ángulo de lanzamiento son los mismos?

Si se tiene en cuenta la resistencia del aire, aunque la velocidad inicial y el ángulo de lanzamiento sean los mismos, la trayectoria de los diferentes proyectiles ya no será la misma. El rozamiento influye de modo diferente en cada proyectil en función de su forma, por ejemplo.

Sirvan como ejemplo las diferencias entre los lanzamientos de disco o jabalina en atletismo. O también, las pequeñas modificaciones de forma que puede tener una cometa en kitesurf permite un rozamiento con el aire que afecta a la trayectoria de la cometa y cómo esta arrastra a quien la controla.

23 **¿Qué relación debe haber entre el ángulo de lanzamiento de dos móviles que se lanzan con la misma velocidad para que tengan el mismo alcance? En esas circunstancias, ¿alcanzan también la misma altura máxima? ¿Tardan el mismo tiempo en completar su recorrido?**

La expresión que nos proporciona el alcance máximo conseguido por un proyectil en función de su velocidad inicial y del ángulo de lanzamiento es esta:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,(2\alpha)}{g}$$

Los ángulos de lanzamiento deben ser complementarios. Por ejemplo, 30° y 60°. Para estos casos el seno del ángulo doble es el mismo.

La expresión que nos proporciona la altura máxima alcanzada por el proyectil en función de su velocidad inicial y del ángulo de lanzamiento es esta:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\alpha}{2 \cdot g}$$

Así, depende del ángulo de lanzamiento. Para el proyectil lanzado con un ángulo menor de los dos la altura máxima alcanzada será, por tanto, menor.

La expresión que nos proporciona el tiempo de vuelo para el proyectil en función de su velocidad inicial y del ángulo de lanzamiento es esta:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \text{sen}\,\alpha}{g}$$

Así, para el proyectil lanzado con un ángulo menor de los dos el tiempo de vuelo será también más pequeño que para el caso del proyectil lanzado con un ángulo mayor y complementario.

24 **Localiza la diana en un determinado punto del espacio y mide su posición horizontal y vertical con el medidor. Trata de encontrar, al menos, tres combinaciones de velocidad y ángulo de lanzamiento para que el proyectil impacte en ella.**

Respuesta práctica.

- Para un ángulo dado, el alcance será mayor si la velocidad es mayor.
- Para una velocidad dada, el alcance será máximo con $\alpha = 45°$ y se reducirá a medida que nos alejemos de este valor, tanto por exceso como por defecto.

25 **Un disco de 40 cm de radio gira a 33 rpm. Calcula:**

a) La velocidad angular en rad/s.

b) La velocidad angular en rad/s en un punto situado a 20 cm del centro.

a) $\omega = 33\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 1{,}1\pi\text{ rad/s} = \mathbf{3{,}46\ rad/s}$

b) Es la misma, ya que no varía con el radio. Por tanto: $\omega =$ **3,46 rad/s**. Es la velocidad lineal la que varía con el radio: $v = \omega \cdot R$.

26 Calcula la velocidad lineal del borde de una rueda de 75 cm de diámetro si gira a 1000 rpm.

Primero se ha de convertir la velocidad angular a unidades del sistema internacional:

$$\omega = 1000\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 33{,}\widehat{3}\,\pi\text{ rad/s}$$

Calculamos la velocidad lineal: $v = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{D}{2} = 33{,}\widehat{3}\,\pi\text{ rad/s} \cdot \frac{0{,}75\text{ m}}{2} = \mathbf{39{,}27}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$

27 Determina si las siguientes frases son verdaderas o falsas:

a) La aceleración angular se mide en rad/s.

b) La aceleración tangencial de un punto de la circunferencia se puede medir con el ángulo recorrido por unidad de tiempo.

c) Todos los radios de una rueda de bicicleta tienen la misma aceleración angular.

a) **Falsa.** Son las unidades de la velocidad, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; θ en rad y t en s.

b) **Falsa.** Se mide en m/s^2.

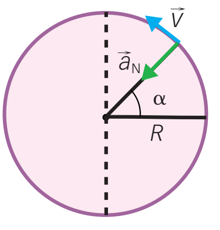
c) **Verdadera.** Todos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo.

28 En el siguiente esquema reconoce:

a) La aceleración normal.

b) La velocidad lineal.

c) El ángulo recorrido y el radio.



Respuesta gráfica

29 Dos niños van montados en dos caballitos que giran solidarios con la plataforma de un tiovivo con $\omega = 4$ rpm. Si la distancia de los caballos al eje de giro es de 2 y 3 m, calcula:

a) La velocidad angular en rad/s.

b) El número de vueltas que dan los niños en cinco minutos.

c) El espacio recorrido por cada uno de ellos en ese tiempo.

d) ¿Qué niño se mueve con mayor aceleración total?

a) $\omega = 4\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 0{,}1\widehat{3}\,\pi\text{ rad/s} = \mathbf{0{,}42\ rad/s}$

b) Si dan 4 vueltas en 1 minuto, en 5 minutos darían **20 vueltas**.

c) Hallamos el espacio recorrido.

$$s_1 = \theta \cdot R_1 = 2\pi \cdot 2\text{ m} = \mathbf{251\,m}$$
$$s_2 = \theta \cdot R_2 = 2\pi \cdot 3\text{ m} = \mathbf{377\,m}$$

d) Ambos tienen solo aceleración normal: $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$. Como ambos tienen la misma velocidad angular, tendrá mayor aceleración el que se encuentra más lejos, o sea, el caballo situado a 3 m del eje de giro.

30 Una rueda que gira a 300 rpm es frenada y se detiene completamente a los 10 s. Calcula:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad angular a los 3 s después de comenzar el frenado.

c) El número de vueltas que da hasta que frena.

Primero convertimos la velocidad angular a unidades del sistema internacional:

$$\omega_0 = 300\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 10\pi\text{ rad/s}$$

a) $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{(0 - 10\pi)\text{ rad/s}}{10\text{ s}} = \mathbf{-\pi\dfrac{rad}{s^2}}$

b) $\omega = \omega_0 + \alpha\cdot t = 10\pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} - \pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}\cdot 3\text{ s} = \mathbf{7\pi\dfrac{rad}{s^2}}$

c) Cuando se detiene: $\omega = 0$. Sustituimos en la ecuación de la velocidad angular y despejamos el tiempo:

$$0 = \omega_0 + \alpha\cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-10\pi\text{ rad/s}}{-\pi\text{ rad/s}^2} = 10\text{ s}$$

Sustituimos en la ecuación de la posición angular y calculamos el ángulo recorrido. Pasamos los radianes a vueltas:

$$\Delta\theta = \omega_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 = -10\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 10\text{ s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\cdot(10\text{ s})^2$$

$$\Delta\theta = 50\pi\,\cancel{\text{rad}}\cdot\frac{1\text{ vuelta}}{2\pi\,\cancel{\text{rad}}} = \mathbf{25\ vueltas}$$

31 Se deja caer una rueda de 30 cm de radio por un plano inclinado de forma que su velocidad angular aumenta a un ritmo constante. Si la rueda parte del reposo y llega al final del plano al cabo de 5 s con una velocidad angular de π rad/s, calcula:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad angular a los 3 s.

c) La aceleración tangencial y normal al final del plano.

a) Es un movimiento circular uniformemente acelerado:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\pi\text{ rad/s}}{5\text{ s}} = \mathbf{0{,}2\pi\ rad/s^2}$$

b) $\omega = \alpha\cdot t = 0{,}2\pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}\cdot 3\text{ s} = \mathbf{0{,}6\pi\dfrac{rad}{s^2}}$

c) Para calcular la aceleración normal hallamos la velocidad angular a los 5 s:

$$\omega = \alpha\cdot t = 0{,}2\pi\text{ rad/s}^2\cdot 5\text{ s} = \pi\text{ rad/s}$$

La aceleración normal será:

$$a_N = \omega^2\cdot R = (\pi\text{ rad/s})^2\cdot 0{,}3\text{ m} = \mathbf{2{,}96\ m/s^2}$$

La aceleración tangencial será:

$$a_T = \alpha\cdot R = 0{,}2\pi\text{ rad/s}^2\cdot 0{,}3\text{ m} = \mathbf{0{,}19\ m/s^2}$$

ACTIVIDADES FINALES

Movimiento uniforme

32 Escribe la ecuación de movimiento de un móvil que parte del punto $\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ km y, tras 2 horas moviéndose en línea recta, llega al punto $\vec{r}_2 = 6\,\vec{i} + 9\,\vec{j}$ km.

a) ¿Cuál es el vector velocidad del móvil?

b) ¿Cuál es el módulo de la velocidad? Expresa el resultado en km/h.

a) El vector velocidad del móvil es:

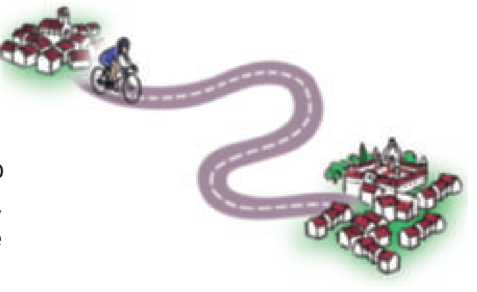
$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t} = \frac{\left[(6\,\vec{i} + 9\,\vec{j}) - (2\,\vec{i} + 3\,\vec{j})\right]\text{km}}{2\text{ h}}$$

$$\vec{v} = \frac{4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}}{2}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \mathbf{2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\ km/h}$$

b) Calculamos el módulo del vector velocidad:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3{,}6\ km/h}$$

33 Óscar va a visitar a su amiga Blanca en bicicleta desde su pueblo hasta un pueblo próximo que se encuentra a 10 km.

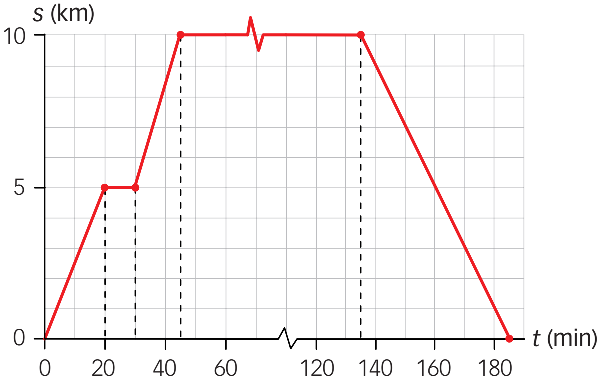


- Parte de su casa a las 8 h 15 min de la mañana con una velocidad de 18 km/h.
- A los 20 minutos de la salida hace un descanso de 10 minutos y después continúa pedaleando, pero, ahora, más deprisa, con una velocidad de 20 km/h, hasta que llega a casa de su amiga.
- Una vez allí se queda hasta las 10 h 30 min, momento en el que emprende la vuelta a su casa con una velocidad constante de 12 km/h.

a) Representa el movimiento de ida y vuelta de Óscar en una gráfica *s*-*t*.

b) ¿Qué tipo de movimiento ha llevado?

a)



b) A: En los primeros 20 minutos (la tercera parte de una hora) a $v_A = 15$ km/h recorre:

$$d_A = v_A \cdot t_A = 15 \frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1}{3} \cancel{\text{h}} = 5\,\text{km}$$

B: Luego está parado 10 min.

C: Reanuda la marcha a 20 km/h hasta recorrer los restantes $d_C = 5$ km. Tarda:

$$\Delta t_C = \frac{d_C}{v_C} = \frac{5\,\cancel{\text{km}}}{20\,\cancel{\text{km}}/\text{h}} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}$$

D: Parado desde las 9:00 (8:15 + 0:20 + 0:10 + 0:15 = 9:00) hasta las 10:30; 90 minutos en total.

E: Recorre los 10 km de vuelta a $v_E = 12$ km/h en un tiempo:

$$\Delta t_E = \frac{d_E}{v_E} = \frac{10\,\cancel{\text{km}}}{12\,\cancel{\text{km}}/\text{h}} = \frac{5}{6}\text{h} = 50\,\text{min}$$

En los tramos B y D están en reposo. En los tramos A, C y E suponemos movimiento uniforme con velocidad constante. Por la información que tenemos por la ilustración de la trayectoria, no es rectilíneo.

34 Un coche A parte del punto kilométrico cero de una carretera a las 10:40 h con una velocidad constante de 80 km/h. Media hora más tarde, otro coche B parte a su encuentro desde el mismo punto con una velocidad de 100 km/h.

a) Calcula el punto kilométrico de la carretera en que están situados ambos vehículos y el tiempo que transcurre hasta encontrarse.

b) ¿Qué velocidad debería llevar el coche B para que se encuentren en el punto kilométrico 180?

a) Cuando los coches se encuentran la posición de ambos es la misma ($x_A = x_B$):

$$\begin{cases} x_A = v_A \cdot t \\ x_B = v_B \cdot (t - 0{,}5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = 80 \cdot t \\ x_B = 100 \cdot t - 50 \end{cases}$$

$$x_A = x_B \Rightarrow 80 \cdot t = 100 \cdot t - 50$$

$$t = 2{,}5\,\text{h}$$

Sustituimos el tiempo en cualquiera de las ecuaciones de posición y calculamos el punto kilométrico en el que se encuentran:

$$x_A = x_B = 80 \frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \cdot 2{,}5\,\cancel{\text{h}} = \mathbf{200\,km}$$

b) Calculamos el tiempo que tarda el coche A en llegar al kilómetro 180 y lo sustituimos en la ecuación de la posición de B despejando la velocidad:

$$x_B = v_B \cdot (t - 0{,}5)$$

$$x_A = v_A \cdot t = 80 \cdot t$$

$$t = \frac{x_A}{v_A} = \frac{180\,\cancel{\text{km}}}{80\,\cancel{\text{km}}/\text{h}} = 2{,}25\,h \Rightarrow v_B = \frac{x_B}{t - 0{,}5} = \frac{180\,\text{km}}{1{,}75\,\text{h}} = \mathbf{102{,}8\,km/h}$$

35 **Un tren parte de una ciudad A en dirección a otra B con una velocidad constante de 90 km/h. Una hora más tarde otro tren parte desde B hacia A con velocidad de 120 km/h. Calcula la distancia entre las dos ciudades si los trenes se cruzan a una distancia de 250 km de la ciudad A.**

Considerando el origen del sistema de referencias para los dos trenes, la ciudad A, y el sentido positivo desde A hacia B, las ecuaciones de movimiento para ambos trenes son:

$$\begin{cases} x_A = v_A \cdot t_A \\ x_B = d - v_B \cdot t_B \end{cases}$$

Para expresar la diferencia de tiempo: $t_B = t_A - 1$. Por eso:

$$\begin{cases} x_A = 90 \cdot t_A \\ x_B = d - 120 \cdot (t_A - 1) \end{cases}$$

Cuando los dos trenes se cruzan están en la misma posición, $x_A = x_B = 250$ km, y en el mismo instante, $t_A = t$.

$$\begin{cases} 250 = 90 \cdot t \\ 250 = d - 120 \cdot (t - 1) \end{cases}$$

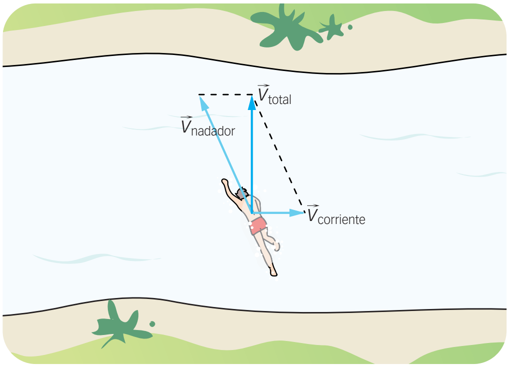
Resolviendo el sistema de ecuaciones nos queda que:

$$t = 2,\overset{\frown}{7}\ \text{h}; \quad d = \mathbf{463,\overset{\frown}{3}\ km}$$

Solo queremos la distancia entre las dos ciudades.

36 **Si queremos cruzar transversalmente un río a nado, ¿qué dirección deberíamos tomar?**

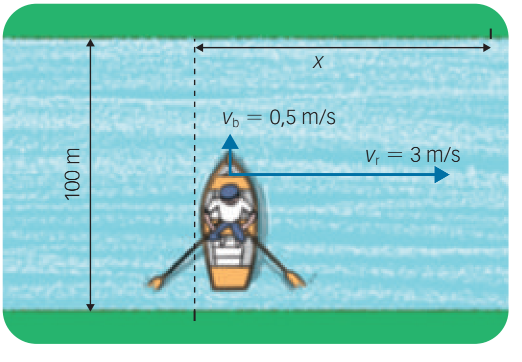
Nadar en una dirección de forma que la suma de la velocidad de la corriente y la del nadador sea perpendicular a la corriente.



37 **Un pescador quiere atravesar un río de 100 m de ancho con una barca, con la que rema a 0,5 m/s.**

a) **Si la velocidad de la corriente, v_r, es de 3 m/s, ¿a qué distancia aguas abajo del punto de partida se encuentra el pescador cuando consigue atravesar el río?**

b) **¿Influiría la velocidad de la corriente en el tiempo que se tarda en atravesar el río?**



a) El tiempo que tardará en atravesar el río será:

$$d = v_{\text{barca}} \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{d}{v_{\text{barca}}} = \frac{100\ \cancel{\text{m}}}{0{,}5\ \dfrac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = 200\ \text{s}$$

La distancia aguas abajo que se habrá desviado la barca será:

$$x = v_{\text{corriente}} \cdot t = 3\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 200\ \cancel{\text{s}} = \mathbf{600\ m}$$

b) No, mientras la barca se mantenga en una trayectoria perpendicular a la corriente. La velocidad de la corriente influye en la distancia recorrida aguas abajo, no en el tiempo empleado en cruzar el río.

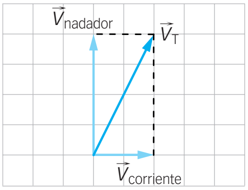
38 **Una nadadora que es capaz de nadar a una velocidad de 0,5 m/s pretende cruzar un río de 20 m de anchura en el que la velocidad del agua es de 0,25 m/s. Calcula el tiempo que tarda en cruzarlo y la distancia aguas abajo que la arrastra la corriente. ¿En qué dirección debería nadar para que su trayectoria fuera perpendicular a la corriente?**

El tiempo que tardará en cruzar el río será:

$$d = v_{\text{nadador}} \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{d}{v_{\text{nadador}}} = \frac{20\ \cancel{\text{m}}}{0{,}5\ \dfrac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = \mathbf{40\ s}$$

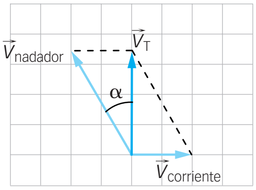
La distancia aguas abajo que la arrastra la corriente será:

$$x = v_{\text{corriente}} \cdot t = 0{,}25\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 40\ \cancel{\text{s}} = \mathbf{10\ m}$$



Para cruzar el río transversalmente, la suma vectorial de la velocidad de la corriente y la velocidad del nadador debe ser perpendicular a la corriente, es decir, $\vec{v}_{\text{T}}$ tiene que ser perpendicular a $\vec{v}_{\text{c}}$:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{v_{\text{c}}}{v_{\text{n}}} = \frac{0{,}25\ \cancel{\text{m/s}}}{0{,}5\ \cancel{\text{m/s}}} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha = 30°}$$



La velocidad perpendicular a la corriente es entonces $v_{\text{T}} = v_{\text{n}} \cdot \cos 30° = 0{,}433$ m/s. Tardaría en cruzar alrededor de 46,2 s.

Movimiento con aceleración constante

39 Un electrón que se mueve con una velocidad de $3 \cdot 10^5$ m/s frena debido a la existencia de otras cargas.

a) Si la aceleración de frenado es de 10^6 cm/s², ¿cuánto tiempo tardará el electrón en reducir la velocidad a la mitad?

b) ¿Y desde que tiene esta nueva velocidad hasta que se detiene?

c) Compara los resultados obtenidos y explica por qué ambos tiempos son iguales.

a) Los datos iniciales son:

$$v_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}; \quad a = -10^6 \text{ cm/s}^2 = -10^4 \text{ m/s}^2$$

Hallamos el tiempo que tarda el electrón en reducir su velocidad a la mitad:

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow \frac{v_0}{2} = v_0 + a \cdot t \Rightarrow \frac{v_0}{2} - v_0 = a \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-v_0}{2 \cdot a} = \frac{-3 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{2 \cdot (-10^4) \text{ m/s}^2} = \mathbf{15\ s}$$

b) Ahora, hasta pararse tardará:

$$0 = v_0 + a \cdot t \Rightarrow t = \frac{-v_0}{a} = \frac{-1{,}5 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{(-10^4) \text{ m/s}^2} = \mathbf{15\ s}$$

c) Son iguales. Como la aceleración es la medida del cambio de velocidad en la unidad de tiempo, a cambios de velocidad iguales le corresponden tiempos iguales.

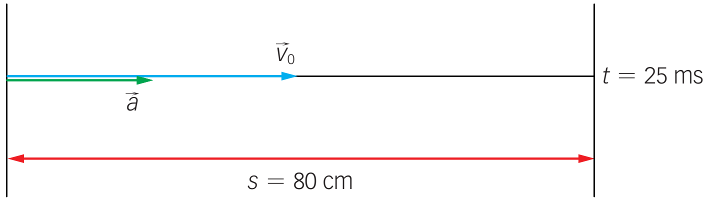
40 Un haz de iones positivos que posee una velocidad de 15 m/s entra en una región y acelera. Necesitamos que en 25 ms los iones alcancen un cátodo situado a 80 cm.

a) Dibuja en tu cuaderno un esquema del ejercicio.

b) Calcula la aceleración constante que hay que comunicarles.

c) Halla la velocidad con que llegan al cátodo.

a)



b) Escribimos la ecuación de la posición del MRUA y despejamos la aceleración, considerando que $x_0 = 0$:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \cdot (x - v_0 \cdot t)}{t^2} = \frac{2 \cdot (0{,}8 \text{ m} - 15 \text{ m/s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ s})}{(2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ s})^2} = \mathbf{1360\ m/s^2}$$

c) Escribimos la ecuación de la velocidad del MRUA, sustituimos y calculamos:

$$v = v_0 + a \cdot t = 15\ \text{m/s} + 1360\ \text{m/s}^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{s} = \mathbf{49\ m/s}$$

41 **Contesta:**

a) ¿Qué tipo de movimientos se dan cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido?

b) ¿Y si tienen sentidos opuestos? Pon ejemplos.

a) Se trata de un movimiento rectilíneo donde la velocidad crece con el tiempo.

Ejemplo: un coche que se mueve por una carretera recta acelerando o un cuerpo que se deja caer desde cierta altura.

b) Se trata de un movimiento rectilíneo como antes, pero de velocidad decreciente.

Ejemplo: lanzamiento vertical y hacia arriba de un cuerpo.

42 **En el anuncio de un nuevo modelo de coche se dice que es capaz de pasar de cero a 100 km/h en 6 s.**

a) Calcula la aceleración media.

b) Calcula el espacio que recorre durante este tiempo.

a) Expresamos la velocidad en m/s:

$$v = 100\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 2{,}\widehat{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos la aceleración media:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(2{,}\widehat{7} - 0)\ \text{m/s}}{6\ \text{s}} = 4{,}\widehat{629}\ \text{m/s}^2 = \mathbf{4{,}63\ m/s^2}$$

b) Determinamos el espacio recorrido en 6 s, teniendo en cuenta que x_0 y v_0 son cero:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}\widehat{629}\ \text{m/s}^2 \cdot (6\ \text{s})^2 = \mathbf{83{,}\widehat{3}\ m}$$

43 **Un coche necesita 40 s para alcanzar una velocidad de 100 km/h partiendo del reposo.**

a) Calcula la aceleración y el espacio recorrido en ese tiempo.

b) Si después frena con una aceleración de 3 m/s², calcula el tiempo que tarda hasta pararse.

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica velocidad-tiempo del movimiento desde que el coche arranca hasta que se para.

a) Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 100\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 27{,}\widehat{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La aceleración será:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(27{,}\widehat{7} - 0)\ \text{m/s}}{40\ \text{s}} = \mathbf{0{,}69\widehat{4}\ m/s^2}$$

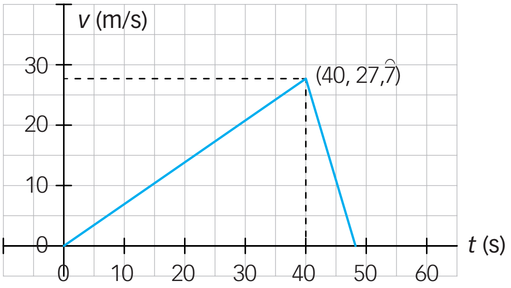
El espacio recorrido es:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}69\widehat{4}\ \text{m/s}^2 \cdot (40\ \text{s})^2 = \mathbf{555{,}\widehat{5}\ m}$$

b) El tiempo que tarda en pararse es:

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 27{,}\widehat{7}\ \text{m/s}}{-3\ \text{m/s}^2} = 9{,}\widehat{259}\ \text{s} = \mathbf{9{,}26\ s}$$

c) Representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo:



44 Un tren de 80 m de longitud circula a 120 km/h y una señal le indica que a una distancia de 100 m debe ir a 90 km/h.

a) ¿Qué aceleración de frenado debe aplicar la conductora?

b) ¿Cuánto tiempo tarda el tren en cruzar completamente un túnel de 200 m cuando lleva una velocidad constante de 90 km/h?

Expresamos las velocidades en m/s:

$$v_0 = 120\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 33{,}\widehat{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 90\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) A partir de la siguiente expresión, que relaciona velocidad y posición en un MRUA, calculamos la aceleración de frenado:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot x$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot x} = \frac{(25\ \text{m/s})^2 - (33{,}\widehat{3}\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 100\ \text{m}} = -2{,}430\widehat{5}\ \text{m/s}^2 = \mathbf{-2{,}43\ m/s^2}$$

b) Para cruzar completamente un túnel de 200 m debemos tener en cuenta la longitud del túnel y la longitud del tren. Deben sumarse ambas longitudes. Por tanto, el espacio que debe recorrer es:

$$x = 200\ \text{m} + 80\ \text{m} = 280\ \text{m}$$

Y el tiempo que emplea será:

$$x = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{280\ \cancel{\text{m}}}{25\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = \mathbf{11{,}2\ s}$$

45 Una moto que se encuentra parada en un semáforo arranca en el mismo momento en que es adelantada por un coche que se mueve con velocidad constante de 90 km/h. Si la moto arranca con aceleración constante de 1,5 m/s², calcula:

a) El tiempo que transcurre hasta que la moto adelanta al coche.

b) La velocidad que lleva la moto en ese instante.

Expresamos la velocidad del coche en m/s:

$$v_{\text{coche}} = 90\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 25\text{ m/s}$$

a) Planteamos las ecuaciones de movimiento (el coche lleva un MRU y la moto lleva un MRUA):

$$\begin{cases} x_{\text{coche}} = x_{0,\text{coche}} + v_{\text{coche}} \cdot t = v_{\text{coche}} \cdot t \\ x_{\text{moto}} = x_{0,\text{moto}} + v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \dfrac{1}{2} \cdot a_{\text{moto}} \cdot t^2 \end{cases}$$

En $t = 0$ s los dos vehículos están en la línea del semáforo, $x_{0,\text{coche}} = x_{0,\text{moto}} = 0$ m. En el instante, t, que la moto adelanta al coche, las posiciones de ambos vehículos coinciden, $x_{\text{coche}} = x_{\text{moto}}$. Igualamos y resolvemos para despejar el tiempo de encuentro:

$$x_{\text{coche}} = x_{\text{moto}} \Rightarrow v_{\text{coche}} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a_{\text{moto}} \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{2 \cdot v_{\text{coche}}}{a_{\text{moto}}} = \frac{2 \cdot 25\,\cancel{\text{m}}/\text{s}}{1{,}5\,\cancel{\text{m}}/\text{s}^2} = \mathbf{33{,}\widehat{3}\text{ s}}$$

b) La velocidad de la moto cuando adelanta al coche es:

$$v_{\text{moto}} = v_0 + a \cdot t = 0 + 1{,}5\,(\text{m/s}^2) \cdot 33{,}\widehat{3}\text{ s} = \mathbf{50\text{ m/s}}$$

46 Un vehículo parte del reposo y aumenta su velocidad a un ritmo de 2 m/s cada segundo durante 10 s. Después, continúa con velocidad constante durante 5 s. Al final, frena y se para en 4 s. Calcula el espacio total recorrido y la aceleración en el último tramo.

Para calcular el espacio total recorrido debemos analizar cada tramo por separado:

Primer tramo (MRUA): $t = 10$ s; $v_0 = 0$ m/s; $a = 2$ m/s².

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{ m/s}^2 \cdot (10\text{ s})^2 = 100\text{ m}$$

$$v_1 = v_0 + a \cdot t = 2\text{ m/s}^2 \cdot 10\text{ s} = 20\text{ m/s}$$

Segundo tramo (MRU): $t = 5$ s; $x_1 = 100$ m; $v_1 = 20$ m/s = cte.

$$x_2 = x_1 + v_1 \cdot t = 100\text{ m} + 20\text{ m/s} \cdot 5\text{ s} = 200\text{ m}$$

Tercer tramo (MRUA): $t = 4$ s; $x_2 = 200$ m; $v_2 = 20$ m/s; $v_3 = 0$ m/s.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0 - 20)\text{ m/s}}{4\text{ s}} = -5\text{ m/s}^2$$

$$x_3 = x_2 + v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 200\text{ m} + 20\text{ m/s} \cdot 4\text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 5\text{ m/s}^2 \cdot (4\text{ s})^2 = 240\text{ m}$$

El espacio total recorrido es **240 m** y la aceleración en el último tramo es **−5 m/s²**.

47 **Representa gráficamente la velocidad y la posición frente al tiempo para el caso de un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad desde una altura de 100 m.**

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ v = -g \cdot t \end{cases}$$

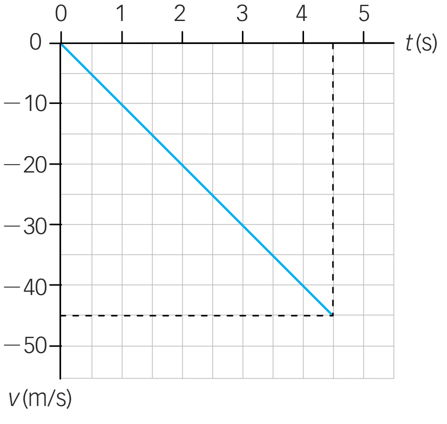
Hacemos $y = 0$ m, y calculamos el tiempo que tarda en caer:

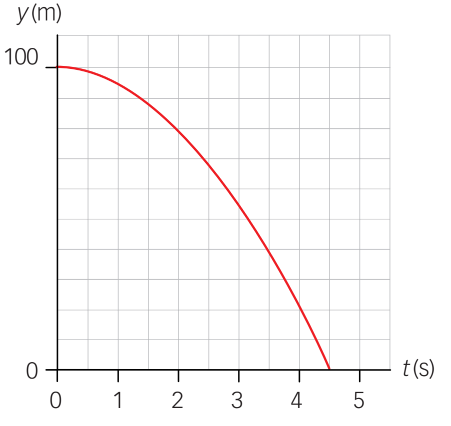
$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{4{,}5\ s}$$

Sustituimos el tiempo de caída en la ecuación de la velocidad y calculamos la velocidad con la que llega al suelo:

$$v = -9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 4{,}5\ \text{s} = \mathbf{-44{,}3\ m/s}$$

El signo negativo indica que el cuerpo se mueve hacia abajo. Representamos la componente vertical de la velocidad frente al tiempo y la posición vertical también frente al tiempo:





48 **Se dejan caer dos bolas de acero de masas de 5 kg y 20 kg.**

a) ¿Cuál de ellas llegará antes al suelo?

b) ¿Cuál llegará con una mayor velocidad?

a) Ambas llegan a la vez. La aceleración es igual para las dos e igual a g.

Escribimos la ecuación de movimiento y hacemos $y = 0$ para calcular el tiempo que tardan en llegar al suelo es:

$$y = h + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; 0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Como podemos ver en la ecuación anterior, el tiempo no depende de la masa.

b) Ambas llegan con la misma velocidad independientemente de su masa:

$$v = -g \cdot t$$

49 Una pelota que se suelta desde una cierta altura tarda 10 segundos en caer al suelo.

a) ¿Durante cuál de esos 10 segundos se produce un mayor incremento de la velocidad?

b) ¿Y del espacio recorrido?

a) $\Delta v = a \cdot \Delta t$. La aceleración es $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

La variación de la velocidad para cada $\Delta t = 1$ s es $\Delta v = 9{,}8$ m/s, es decir, siempre la misma.

La velocidad va aumentando cada segundo en 9,8 m/s.

b) Como:

$$y = y_i + v_i \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta_i y = y - y_i = v_i \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2$$

Donde v_i es la velocidad al inicio de cada intervalo de tiempo, y $\Delta t = 1$ s. La velocidad de cada intervalo es mayor, y el espacio recorrido, $\Delta_i y$, en ese segundo también lo es. El mayor incremento en el espacio recorrido ocurre en el último segundo, donde se inicia con mayor velocidad.

50 Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m/s. Halla la velocidad cuando se encuentra a 30 m de altura y el tiempo que tarda en llegar al punto más alto de su recorrido. Dibuja la gráfica velocidad-tiempo desde que el cuerpo se lanzó hasta que volvió otra vez al punto de partida. Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

A partir de la siguiente expresión, particularizada para un MRUA bajo la aceleración de la gravedad, que relaciona velocidad y posición, calculamos la velocidad para $y = 30$ m:

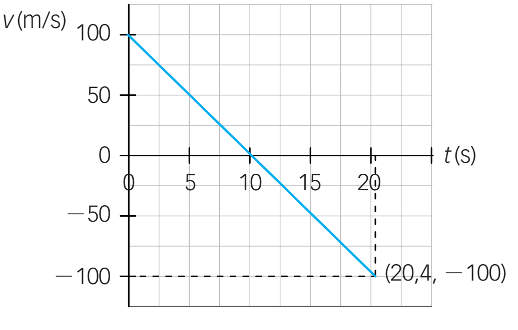
$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot (-g) \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y} = \sqrt{(100\ \text{m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 30\ \text{m}} = \mathbf{97{,}02\ m/s}$$

Como el lanzamiento se lleva a cabo verticalmente, la velocidad solo tiene componente en el eje Y. En el punto más alto esta velocidad se anula, por tanto:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{100\ \text{m/s}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{10{,}2\ s}$$

Representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo:



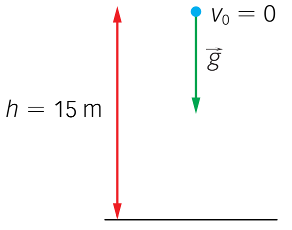
51 **Un niño que se encuentra en la calle ve caer una pelota verticalmente desde una ventana. Si el niño está a 4 m de distancia en horizontal al punto de caída y la altura de la ventana es de 15 m, calcula a qué velocidad media debe correr para atrapar la pelota antes de que llegue al suelo. Dibuja en tu cuaderno un esquema de la situación.**

Ecuación del movimiento de la pelota:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Haciendo $y = 0$ m se calcula el tiempo que invierte el cuerpo en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 1{,}75\ \text{s}$$



La velocidad a la que debe correr el niño es:

$$v = \frac{4\ \text{m}}{1{,}75\ \text{s}} = \mathbf{2{,}29\ m/s}$$

52 **Se lanzan dos cuerpos verticalmente hacia arriba con velocidad de 50 m/s separados por un intervalo de tiempo de 3 s. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse, la velocidad que lleva cada uno en ese momento y la altura a la que se cruzan. Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.**

El intervalo de tiempo es $t_2 = t_1 - 3$ s. Escribimos las ecuaciones de la posición de ambos cuerpos:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow y_1 = 50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

$$y_2 = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow y_2 = 50 \cdot (t_1 - 3) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 3)^2$$

En el momento de cruce sus posiciones coinciden, $y_1 = y_2$. Queda una ecuación con la incógnita en el tiempo que tardan en cruzarse desde que se lanzó la primera. Resolviendo:

$$50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 50 \cdot (t_1 - 3) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 3)^2$$

$$50 \cdot t_1 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} = 50 \cdot t_1 - 150 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} - \frac{9}{2} \cdot g + 3 \cdot g \cdot t_1$$

$$0 = -150 - \frac{9}{2} \cdot g + 3 \cdot g \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{150 + 4{,}5 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 9{,}8} = 6{,}60\ s$$

La velocidad para $t = 6{,}60$ s:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 50\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}60\ \text{s} = \mathbf{-14{,}7\ m/s}$$
$$v_2 = v_0 - g \cdot (t - 3) = 50\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}60\ \text{s} - 3\ \text{s}) = \mathbf{14{,}7\ m/s}$$

Para calcular la altura a la que se cruzan basta sustituir el tiempo del cruce en cualquiera de las ecuaciones de la posición:

$$y_1 = 50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 50\ \text{m} \cdot 6{,}60\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}60\ \text{s})^2 = \mathbf{116{,}5\ m}$$

Movimiento parabólico

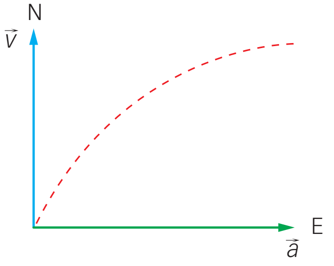
53 Contesta:

a) ¿Puede tener un automóvil su velocidad dirigida hacia el norte y sin embargo la aceleración estar dirigida hacia el sur? ¿Y hacia el este?

c) ¿Cómo serían estos movimientos?

a) Sí, sería un movimiento hacia el norte con velocidad decreciente, hasta detenerse.

Con la aceleración hacia el este. Solo es posible en el instante inicial. A partir del instante inicial la velocidad cambiaría de dirección, inclinándose hacia el noreste, y ya no estaría dirigida hacia el norte. Su movimiento seguiría una trayectoria curva, como se indica en el dibujo.

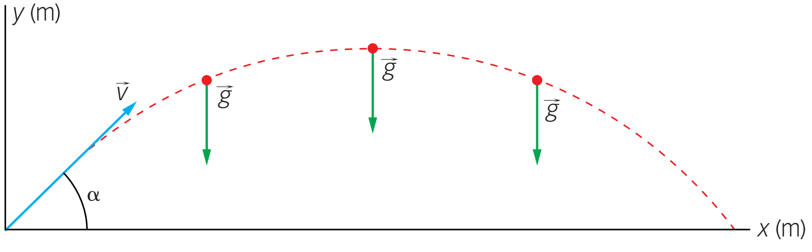


b) El primero es rectilíneo. Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado.

El segundo, curvilíneo. En el caso de que la componente norte de la velocidad fuera constante se trataría de un movimiento compuesto por dos: MRU en la dirección norte y MRUA en la dirección este, un movimiento parabólico.

54 ¿Qué dirección tiene la aceleración de un cuerpo que es lanzado con determinada velocidad formando un ángulo α con la superficie de la Tierra? Haz un esquema que aclare la respuesta.

La aceleración siempre apunta hacia la superficie de la Tierra (perpendicular a la misma y dirigida hacia el centro).



Esto es así siempre y cuando el lanzamiento no sea muy largo y la aproximación de tierra plana sea válida. Si el lanzamiento es muy largo (intercontinental), la aproximación de tierra plana no es válida. En este último caso debemos tener en cuenta que la aceleración de la gravedad se dirige al centro de la tierra, y que los distintos vectores que representan la aceleración de la gravedad durante el recorrido no son vectores paralelos.

55 Se deja caer una pelota desde una altura h a la vez que se lanza una canica desde el mismo punto con velocidad horizontal v_0.

a) ¿Cuál de los dos objetos llega antes a la superficie de la Tierra?

b) Haz un esquema.

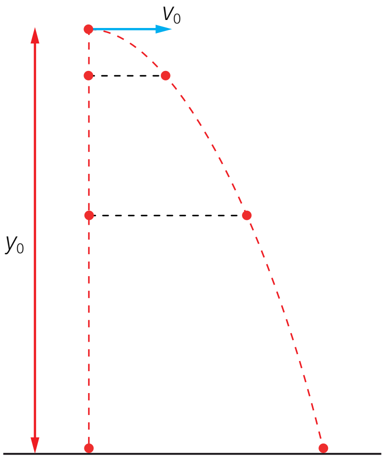
a) Llegan a la vez. El movimiento horizontal no afecta al vertical.

b) Ecuaciones de ambos cuerpos. La primera es del cuerpo que se deja caer sin velocidad inicial, $v_0 = 0$ m/s. La segunda es la del cuerpo al que se le da cierta velocidad horizontal, $v_0 \neq 0$ m/s:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

En lo que respecta al movimiento vertical, la ecuación de movimiento es la misma para ambos:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



56 Indica en tu cuaderno si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) En un MUA la velocidad y la aceleración tienen siempre la misma dirección.

b) En un MUA la representación gráfica de Δr frente a t siempre es una parábola, aunque el movimiento sea retardado.

c) En el punto más elevado de la trayectoria de un proyectil, la velocidad total es nula.

d) El alcance de un proyectil solo depende de la velocidad inicial.

a) **Falsa.** $\vec{v}$ y $\vec{a}$ pueden tener cualquier dirección.

b) **Verdadera.**

c) **Falsa.** Es nula solo la componente vertical de la velocidad.

d) **Falsa.** Depende de la velocidad inicial y del ángulo.

57 Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un móvil son:

$$\begin{cases} x = 50 \cdot t \\ y = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2 \end{cases}$$

Halla la ecuación de la trayectoria y calcula la velocidad en $t = 3$ s.

Para obtener la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 50 \cdot t & \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{50} \\ y = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2 & \Rightarrow \quad y = 50 \cdot \dfrac{x}{50} - 5 \cdot \left(\dfrac{x}{50}\right)^2 \end{cases}$$

Ecuación de la trayectoria:

$$\boldsymbol{y = x - \frac{x^2}{500}}$$

El vector velocidad se obtiene derivando respecto al tiempo el vector de posición:

$$\vec{r} = 50 \cdot t\,\vec{i} + (50 \cdot t - 5 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left[50 \cdot t\,\vec{i} + (50 \cdot t - 5 \cdot t^2)\,\vec{j}\right]}{dt} = 50\,\vec{i} + (50 - 10 \cdot t)\,\vec{j}\text{ m/s}$$

Para $t = 3$ s:

$$\vec{v}(t = 3\text{ s}) = 50\,\vec{i} + (50 - 10 \cdot 3)\,\vec{j} = \mathbf{50\,\vec{i} + 20\,\vec{j}\text{ m/s}}$$

58 **Un cañón dispara un proyectil a una velocidad de 500 m/s con un ángulo de 15°. Calcula, despreciando el rozamiento con el aire.**

a) El alcance máximo.

b) La altura máxima.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

a) Calculamos el alcance máximo:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,(2\,\alpha)}{g} = \frac{(500\text{ m/s})^2 \cdot \text{sen}\,(2 \cdot 15°)}{9{,}8\text{ m/s}^2} = \mathbf{12\,755\text{ m}}$$

b) Calculamos la altura máxima:

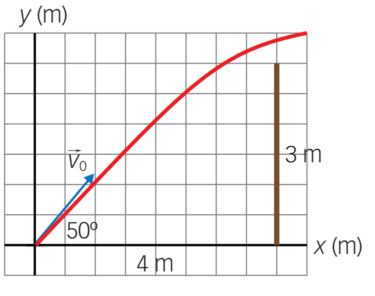
$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\alpha}{2 \cdot g} = \frac{(500\text{ m/s})^2 \cdot \text{sen}^2\,15°}{2 \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2} = \mathbf{854{,}4\text{ m}}$$

59 **Una niña chuta un balón con un ángulo de 50° sobre la horizontal. A una distancia de 4 m delante de la niña hay una valla de 3 m de altura. Halla el valor mínimo del módulo de la velocidad inicial del balón para que pase por encima de la valla. Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.**

Escribimos las ecuaciones de la posición:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = v_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Para calcular la velocidad inicial imponemos la condición del problema de que el balón pase por encima de la valla, es decir, para $x = 4$ m, $y \geq 3$ m. Despejamos el tiempo de la primera ecuación:



Despejando el tiempo y sustituyendo los valores:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} = \frac{4}{v_0 \cdot \cos 50°}$$

Sustituimos la expresión en la segunda ecuación y resolvemos la inecuación:

$$y = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{4}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{4}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 \geq 3$$

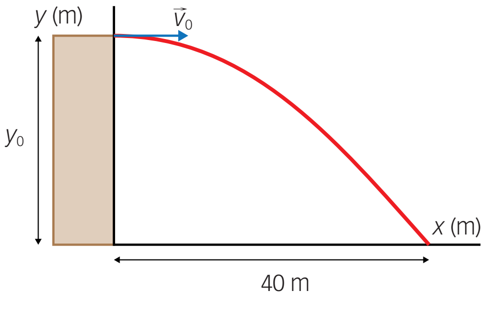
$$4 \cdot \text{tg}\,\alpha - \frac{8 \cdot g}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \geq 3 \Rightarrow 4 \cdot \text{tg}\,\alpha - 3 \geq \frac{8 \cdot g}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{8 \cdot g}{(4 \cdot \text{tg}\,\alpha - 3) \cdot \cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}8}{(4 \cdot \text{tg}\,50° - 3) \cdot \cos^2 50°}} = \mathbf{10{,}36\ \frac{m}{s}}$$

El módulo de la velocidad inicial debe ser mayor o igual que **10,36 m/s**.

60 **Se lanza un objeto horizontalmente desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de 72 km/h. El objeto cae a una distancia de 40 m medidos desde la vertical del punto de lanzamiento. Calcula la altura del acantilado y la velocidad del objeto al llegar al mar. Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.**

Tomamos como origen del sistema de referencia el punto del suelo situado en la vertical de lanzamiento.



Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v_{0x} = 72\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} = 20\ \frac{m}{s}$$

Escribimos las ecuaciones del movimiento:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$$

$$\vec{r} = h\,\vec{j} + v_{0x}\,\vec{i} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-g\,\vec{j}\right) \cdot t^2 \Rightarrow \vec{r} = v_{0x} \cdot t\,\vec{i} + \left(h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right)\vec{j}$$

Cuyas componentes son:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Calculamos el tiempo que tarda el cuerpo en recorrer los 40 m en horizontal:

$$x = v_{0x} \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{40\ \cancel{\text{m}}}{20\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = 2\ \text{s}$$

Calculamos la altura del acantilado. Sustituimos el valor $y = 0$ m, al caer al agua.
Y el tiempo calculado antes:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s})^2 = \mathbf{19{,}6\ m}$$

Resolvemos vectorialmente, ya que la velocidad final tiene componente en ambas direcciones.
La velocidad del cuerpo al llegar al suelo es:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t = v_{0x}\,\vec{i} - g \cdot t\,\vec{j} = 20\,\vec{i} - 9{,}8 \cdot 2\,\vec{j} = 20\,\vec{i} - 19{,}6\,\vec{j}\ \text{m/s}$$

Y su módulo será la raíz cuadrada de sus componentes al cuadrado:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(20\ \text{m/s})^2 + (-19{,}6\ \text{m/s})^2} = \mathbf{28\ m/s}$$

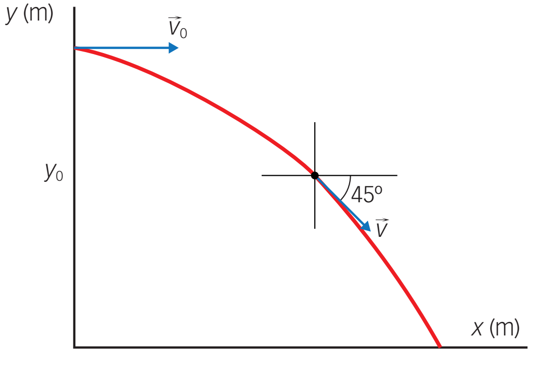
61 **Un esquiador salta desde un trampolín que se encuentra a una altura de 10 m con una velocidad horizontal de 30 km/h. Calcula el tiempo de vuelo y el punto en el que su velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal.**
Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Expresamos la velocidad en m/s:

$$v_{0x} = 30\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 8{,}\widehat{3}\ \text{m/s}$$

Escribimos las componentes de la ecuación de movimiento:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t = v_{0x} \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_0 - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$



Haciendo $y = 0$, calculamos el tiempo de vuelo:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{1{,}43\ s}$$

Escribimos las componentes de la velocidad:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g \cdot t = -g \cdot t \end{cases}$$

Para que el vector velocidad forme un ángulo de 45º con la horizontal ha de cumplirse que:

$$\text{tg } 45° = \frac{|v_y|}{|v_x|} = 1 \Rightarrow |v_x| = |v_y|$$

$$v_{0x} = g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_{0x}}{g} = \frac{8{,}\widehat{3} \cancel{\text{m}}/\text{s}}{9{,}8 \cancel{\text{m}}/\text{s}^2} = 0{,}85 \text{ s}$$

Sustituyendo el tiempo en las componentes de la ecuación de movimiento calculamos la situación de dicho punto:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t = 8{,}\widehat{3} \text{ m/s} \cdot 0{,}85 \text{ s} = 7{,}09 \text{ m} \\ y = y_0 - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 10 \text{ m} - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}85 \text{ s})^2 = 6{,}46 \text{ m} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\vec{r} = \mathbf{7{,}09\,\vec{i} + 6{,}46\,\vec{j} \text{ m/s}}$$

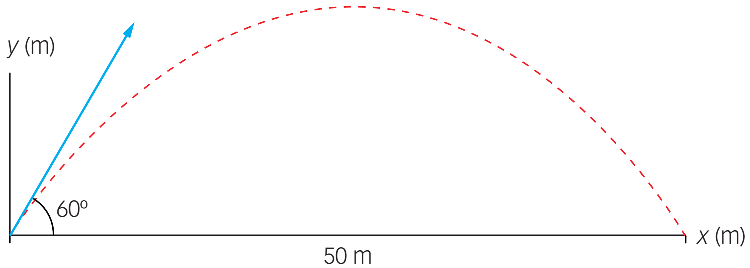
62 Un balón es lanzado con un ángulo de 60° por encima de la horizontal y recorre una longitud de 50 m en el campo de fútbol.

a) Dibuja un esquema del ejercicio.

b) Calcula la velocidad inicial.

c) ¿Qué altura alcanzó?

a)



b) Despejamos v_0 de la ecuación del alcance:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g} \Rightarrow v_0^2 = \frac{x_{\text{máx}} \cdot g}{\text{sen } 2\alpha}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{x_{\text{máx}} \cdot g}{\text{sen } 2\alpha}} = \sqrt{\frac{50 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{\text{sen } 120°}} = \mathbf{23{,}8 \text{ m/s}}$$

c) Calculamos la altura que alcanzó el balón:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{2 \cdot g} = \frac{(23{,}8 \text{ m/s})^2 \cdot \text{sen}^2 60°}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{21{,}7 \text{ m}}$$

Movimientos circulares

63 La Estación Espacial Internacional dio 133 vueltas a la Tierra en 8 días y 13 horas a una altura media de 409 km.

Suponiendo un movimiento circular y sabiendo que el radio medio de la Tierra es de 6371 km:

a) Haz un esquema en tu cuaderno indicando la velocidad orbital de la nave, así como la aceleración normal, a_N, en la órbita.

b) ¿Por qué el valor de a_N se parece tanto al valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, g?

Ayuda: ¿hay «gravedad» en órbita? ¿A qué fuerza se debe esa aceleración de la nave?

Expresamos el tiempo y las vueltas en unidades del SI:

$$\left.\begin{array}{l} 8\text{ días} = 8\,\cancel{\text{días}} \cdot \dfrac{24\,\cancel{\text{h}}}{1\,\cancel{\text{día}}} \cdot \dfrac{3600\text{ s}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 691200\text{ s} \\ 13\text{ h} = 13\,\cancel{\text{h}} \cdot \dfrac{3600\text{ s}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 46\,800\text{ s} \end{array}\right\} t = 738\,000\text{ s}$$

$$\theta = 133\text{ vueltas} = 133\,\cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 266\pi\text{ rad}$$

a) Calculamos la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración normal en la órbita:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{266\pi\text{ rad}}{738\,000\text{ s}} = 3{,}60 \cdot 10^{-4}\pi\text{ rad/s}$$

$$v = \omega \cdot R = 3{,}60 \cdot 10^{-4}\pi\text{ rad/s} \cdot (409 + 6\,371) \cdot 10^3\text{ m} = \mathbf{7677{,}24\ m/s}$$

$$a_N = \varphi^2 \cdot R = (3{,}60 \cdot 10^{-4}\pi\text{ rad/s})^2 \cdot (409 + 6\,371) \cdot 10^3\text{ m} = \mathbf{8{,}69\ m/s^2}$$

b) Para un satélite en órbita se cumple que $F = m \cdot a_N$, donde F es la fuerza gravitatoria:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} = m \cdot \frac{v^2}{d} \Rightarrow g = G \cdot \frac{M}{d^2} = \frac{v^2}{d} = a_N$$

La intensidad del campo gravitatorio g a una distancia d del centro de la Tierra es igual a la aceleración normal del satélite.

Como el satélite se encuentra cerca de la superficie de la Tierra (en comparación con el radio, solo aumenta un 6 %), el valor de la aceleración normal no es muy distinto al valor de g en la superficie, es decir, 9,8 m/s²:

$$g = G \cdot \frac{M}{(R_T + h)^2} \simeq G \cdot \frac{M}{R_T^2}$$

64 Un objeto gira en una circunferencia de 3 m de radio con velocidad angular constante dando 8 vueltas cada minuto. Halla en el SI:

- La velocidad angular.
- El periodo.
- La frecuencia.
- La velocidad lineal.
- La aceleración normal.

- 8 vueltas por minuto es lo mismo que 8 rpm. Usamos factores de conversión para expresar en unidades del SI la velocidad angular:

$$\omega = 8\,\text{rpm} = 8\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\,\text{s}} = \mathbf{\frac{4\pi}{15}\,rad/s}$$

- El periodo es el tiempo necesario para completar una vuelta (un giro de 2π rad):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{15}\,\text{rad/s}} = \mathbf{7{,}5\,s}$$

- La frecuencia es el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7{,}5\,s} = \mathbf{0{,}1\widehat{3}\,Hz}$$

- La velocidad lineal depende del radio del giro según la expresión:

$$v = \omega \cdot R = \frac{4\pi}{15}\,\text{rad/s} \cdot 3\,\text{m} = \mathbf{2{,}51\,m/s}$$

- La aceleración normal es proporcional al cuadrado de la velocidad angular y al radio:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{4\pi}{15}\,\text{rad/s}\right)^2 \cdot 3\,\text{m} = \mathbf{2{,}1\,m/s^2}$$

65 Una rueda de 100 cm de radio gira en torno a un eje perpendicular a la misma que pasa por su centro a razón de 900 vueltas por minuto. Determina la velocidad angular en rad/s, el periodo y la velocidad lineal de un punto de su periferia. ¿Cuánto tiempo tardará en girar un ángulo de 0,5 rad?

- Velocidad angular:

$$\omega = 900\,\text{rpm} = 900\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\,\text{s}} = \mathbf{30\pi\,rad/s}$$

- Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30\pi\,\text{rad/s}} = \mathbf{0{,}0\widehat{6}\,s}$$

- Velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = 30\pi\,\text{rad/s} \cdot 1\,\text{m} = \mathbf{94{,}25\,m/s}$$

El tiempo que tardará en girar un ángulo $\Delta\theta = 0{,}5$ rad será:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{0{,}5\,\text{rad}}{30\pi\,\text{rad/s}} = \mathbf{5{,}3 \cdot 10^{-3}\,s}$$

66 El disco duro de un ordenador gira con una velocidad angular de 4200 vueltas por minuto. Calcula:

a) La velocidad angular en unidades del SI.

b) El tiempo que tarda en dar 1,5 vueltas.

c) Las vueltas que da en 10 s.

d) La velocidad de un punto del borde del disco.

Dato: diámetro del disco duro = 10 cm.

a) Velocidad angular:

$$\omega = 4200\ \text{rpm} = 4200\ \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = \mathbf{140\pi\ rad/s}$$

b) Para calcular el tiempo que tarda en dar 1,5 vueltas, pasamos las 1,5 vueltas a radianes:

$$\Delta\theta = 1{,}5\ \cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} = \mathbf{3\pi\ rad}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{3\pi\ \cancel{\text{rad}}}{140\pi\ \cancel{\text{rad}}/\text{s}} = \mathbf{0{,}021\ s}$$

c) Para calcular las vueltas que da en 10 s calculamos el ángulo de giro:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = 140\pi\ \text{rad/s} \cdot 10\ \text{s} = \mathbf{1400\pi\ rad}$$

$$\Delta\theta = 1400\pi\ \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \cancel{\text{rad}}} = \mathbf{700\ vueltas}$$

d) La velocidad lineal de un punto del borde del disco es:

$$v = \omega \cdot R = 140\pi\ \text{rad/s} \cdot 0{,}05\ \text{m} = \mathbf{22\ m/s}$$

67 La distancia entre la Tierra y la Luna es 385 000 km. Sabiendo que el periodo de rotación de la Luna es de 28 días, calcula la velocidad angular de la Luna, su velocidad lineal y su aceleración normal.

Expresamos el periodo de rotación en segundos:

$$T = 28\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = \mathbf{2419200\ s}$$

La velocidad angular de la Luna es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,419\,200\ \text{s}} = 8{,}27 \cdot 10^{-7}\pi\ \text{rad/s} = \mathbf{2{,}60 \cdot 10^{-6}\ rad/s}$$

La velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 2{,}60 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/s} \cdot 3{,}85 \cdot 10^{8}\ \text{m} = \mathbf{1000\ m/s}$$

La aceleración normal es:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (2{,}60 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/s})^2 \cdot 3{,}85 \cdot 10^{8}\ \text{m} = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^{-3}\ m/s^2}$$

68 Un disco de 25 cm de radio, inicialmente en reposo, gira con movimiento uniformemente acelerado alcanzando una velocidad de 100 rpm en 10 s. Calcula:

a) La aceleración angular del disco.

b) La velocidad lineal de un punto de la periferia del disco a los 5 s.

c) El módulo de la aceleración normal en ese momento.

a) Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0; \quad \omega = 100\text{ rpm} = 100\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} = 3{,}\overset{\frown}{3}\pi\text{ rad/s}$$

Aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{3{,}\overset{\frown}{3}\pi\text{ rad/s}}{10\text{ s}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}\ \textbf{rad/s}^{\mathbf{2}}$$

b) Para calcular la velocidad lineal de un punto de la periferia del disco a los 5 s necesitamos calcular la velocidad angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \;\Rightarrow\; \omega = \alpha \cdot t = \frac{\pi}{3}\text{rad/s}^2 \cdot 5\text{ s} = \mathbf{1{,}\overset{\frown}{6}\pi}\ \textbf{rad/s}$$

Así, la velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 1{,}\overset{\frown}{6}\pi\text{ rad/s} \cdot 0{,}25\text{ m} = \textbf{1,31 m/s}$$

c) El módulo de la aceleración normal a los 5 s es:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (1{,}\overset{\frown}{6}\pi\text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}25\text{ m} = \textbf{6,85 m/s}^{\mathbf{2}}$$

69 Un volante de 50 cm de radio parte del reposo y alcanza una velocidad angular de 300 rpm en 5 s. Calcula la aceleración tangencial y la velocidad lineal de un punto de su periferia a los 2 s de iniciado el movimiento.

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0\text{ rad/s}; \quad \omega = 300\text{ rpm} = 300\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} = 10\pi\text{ rad/s}$$

Para calcular la aceleración tangencial calculamos primero la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{10\pi\text{ rad/s}}{5\text{ s}} = 2\pi\text{ rad/s}^2$$

La aceleración tangencial vale:

$$a_T = \alpha \cdot R = 2\pi\text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}5\text{ m} = \boldsymbol{\pi}\ \textbf{m/s}^{\mathbf{2}}$$

Para calcular la velocidad lineal calculamos primero la velocidad angular del volante a los 2 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \;\Rightarrow\; \omega = \alpha \cdot t = 2\pi\text{ rad/s}^2 \cdot 2\text{ s} = \mathbf{4\pi}\ \textbf{rad/s}$$

La velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 4\pi\text{ rad/s} \cdot 0{,}5\text{ m} = \mathbf{2\pi}\ \textbf{m/s}^{\mathbf{2}}$$

70 **La velocidad angular de un motor que gira a 900 rpm desciende uniformemente hasta 10π rad/s después de dar 50 vueltas. Calcula la aceleración angular de frenado y el tiempo necesario para realizar las 50 revoluciones.**

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 900\text{ rpm} = 900\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} = 30\pi\text{ rad/s}$$

$$\omega = 10\pi\text{ rad/s}$$

Para calcular la aceleración angular y el tiempo necesario para realizar 50 vueltas, pasamos las 50 vueltas a radianes:

$$50\,\cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = \mathbf{100\pi\text{ rad}}$$

Y a partir de la siguiente expresión, que relaciona θ y ω en un MCUA, calculamos la aceleración angular:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \theta \Rightarrow \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \theta} = \frac{(10\pi\text{ rad/s})^2 - (30\pi\text{ rad/s})^2}{2 \cdot 100\pi\text{ rad}} = \mathbf{-4\pi\text{ rad/s}^2}$$

El signo negativo indica que la aceleración es de frenado.

Ahora calculamos el tiempo:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{10\pi\text{ rad/s} - 30\pi\text{ rad/s}}{-4\pi\text{ rad/s}^2} = \mathbf{5\text{ s}}$$