8

El movimiento

EL MOVIMIENTO

RECUERDO LO QUE SÉ

- ¿Cuál es la diferencia entre la velocidad media durante un trayecto y la velocidad instantánea?

  La diferencia está en el tiempo considerado para el recorrido. La velocidad media abarca todo el trayecto; la velocidad instantánea corresponde a un breve instante.

- ¿Depende el consumo de combustible de un coche únicamente de la velocidad media mantenida durante su recorrido?

  Mantener la velocidad frente a la fuerza de rozamiento del aire supone un consumo de energía. Más adelante, en el tema dedicado a las fuerzas, se explica que el rozamiento viscoso es proporcional a la velocidad y la proporcionalidad no es lineal.

  Además, los cambios de velocidad suponen variaciones de energía cinética. Si el incremento es positivo, es a costa de la energía contenida en el combustible.

- Pon ejemplos de movimientos donde la velocidad instantánea coincida con la velocidad media.

  Cualquier vehículo moviéndose en línea recta a velocidad constante: un avión, un barco, una bicicleta...

INTERPRETO LA IMAGEN

Observa la imagen. La estela se forma cuando el vapor de agua expulsado por el avión se condensa al entrar en contacto con materia de la atmósfera a una temperatura mucho más baja.

- ¿Qué relación guardan las marcas dejadas en el cielo con la trayectoria del avión?

  Es una relación directa. Pues las partículas de vapor quedan por donde pasó el avión y al condensarse en cristales de hielo hacen visible la posición previa del avión.

- ¿Qué tipo de trayectoria lleva el avión en ese tramo?

  Por lo que se ve, una trayectoria rectilínea.

- ¿Puedes saber a partir de la imagen si el avión está acelerando o frenando? Justifica tu respuesta.

  No, no es posible. Solo el dato de la trayectoria que podemos ver no es suficiente para conocer los cambios en la velocidad.

ACTIVIDADES

1 Calcula el módulo del vector $\vec{a} = \vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$.

$$|\vec{a}| = a = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = +\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = +\sqrt{1+4+4} = +\sqrt{9} = \mathbf{3}$$

2 Dados los siguientes vectores:

- $\vec{u} = -\vec{j} + 2\,\vec{k}$
- $\vec{v} = \vec{i} + 2\,\vec{k}$

a) Calcula el producto $-4 \cdot \vec{u}$.

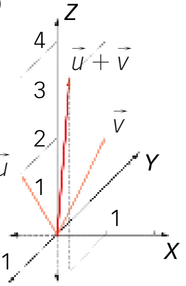
b) Realiza gráfica y algebraicamente la suma $\vec{u} + \vec{v}$.

c) Realiza gráfica y algebraicamente la resta $\vec{v} - \vec{u}$.

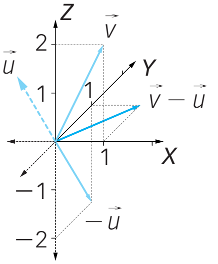
a) $-4 \cdot \vec{u} = -4 \cdot \left(-\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) = \mathbf{4\,\vec{j} - 8\,\vec{k}}$

b) $\vec{u} + \vec{v} = \left(-\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) + \left(\vec{i} + 2\,\vec{k}\right) = \mathbf{\vec{i} - \vec{j} + 4\,\vec{k}}$

b)



c)



c) $\vec{v} - \vec{u} = \left(\vec{i} + 2\,\vec{k}\right) - \left(-\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) = \mathbf{\vec{i} + \vec{j}}$

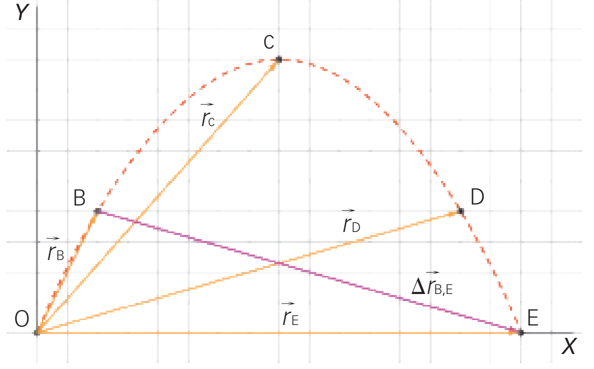
3 Observa la ilustración. Dibuja en tu cuaderno:

a) El vector de posición para cada uno de los puntos señalados: B, C, D y E.

b) El vector desplazamiento entre los puntos B y E.

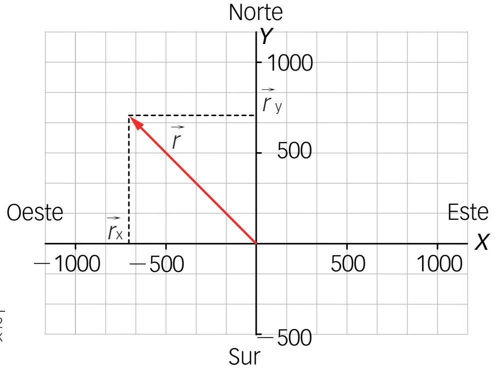
a) Los vectores de color naranja en el dibujo.

b) El vector de color morado en el dibujo.



4 Escribe las coordenadas cartesianas para un punto a 1000 m del origen en dirección noroeste.

Se ha desplazado por igual en ambas direcciones. La dirección este-oeste es el eje *OX*, positivo hacia el este. La dirección norte-sur es el eje *OY*, positivo hacia el norte. Por lo que en la dirección noroeste las componentes en *x* e *y* del vector posición son iguales pero con signo opuesto, $-r_x = r_y$, por tanto:



$$|\vec{r}\,| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{r_x^2 + (-r_x)^2} = \sqrt{2 \cdot r_x^2}$$

Despejamos y calculamos:

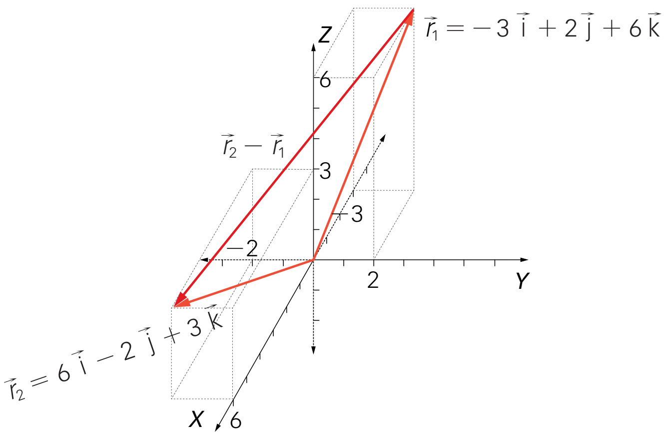
$$-r_x = r_y = \frac{|\vec{r}\,|}{\sqrt{2}} = \frac{1000\ \text{m}}{\sqrt{2}} = 707\ \text{m}$$

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = (r_x, r_y) = \mathbf{(-707, 707)\ m}$$

5 Un punto en una trayectoria (−3, 2, 6) está determinado por el vector de posición $\vec{r}_1$ y otro punto (6, −2, 3) está determinado por el vector $\vec{r}_2$. Con las distancias expresadas en metros, ¿cuáles serán las coordenadas del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?

Dibujamos en un diagrama cartesiano en 3 dimensiones los vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Uniendo sus extremos tenemos el vector diferencia:



Calculamos las coordenadas del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

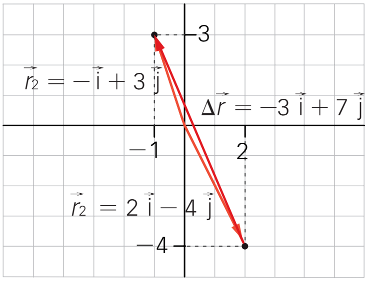
$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (6\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) - (-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k})$$

En los vectores se resta componente a componente. El resultado es:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (6 - (-3))\,\vec{i} + (-2 - 2)\,\vec{j} + (3 - 6)\,\vec{k} = \mathbf{9\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 3\vec{k}}$$

6 Una pelota se desplaza desde el punto P_1, $\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m, hasta el punto P_2, $\vec{r}_2 = -\vec{i} + 3\,\vec{j}$ m. Calcula la distancia entre los puntos P_1 y P_2 en metros. ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?

La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es el módulo de la diferencia de sus vectores de posición.



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-\vec{i} + 3\,\vec{j})\,\text{m} - (2\,\vec{i} - 4\,\vec{j})\,\text{m}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = [(-1-2)\,\vec{i} + (3-(-4))\,\vec{j}]\,\text{m} = \mathbf{-3\,\vec{i} + 7\,\vec{j}\ m}$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(-3)^2 + (7)^2}\ \text{m} = \sqrt{58}\ \text{m} \simeq \mathbf{7{,}62\ m}$$

7 Los vectores de posición de un móvil en dos instantes t_1 y t_2 son:

$$\vec{r}_1 = 6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} \text{ y } \vec{r}_2 = 6\,\vec{j}$$

Calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

Calculamos el vector desplazamiento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (6\,\vec{j})\ \text{m} - (6\,\vec{i} - 4\,\vec{j})\ \text{m} = \mathbf{-6\,\vec{i} + 10\,\vec{j}\ \ m}$$

8 El vector de posición de una pelota en función del tiempo es: $\vec{r}(t) = 3 \cdot t\,\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot t^2\,\vec{k}$ m

Calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ entre los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s.

Calculamos el vector desplazamiento entre los instantes t_1 y t_2:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3 \cdot t_2\,\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot t_2^2\,\vec{k})\,\text{m} - (3 \cdot t_1\,\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot t_1^2\,\vec{k})\,\text{m} =$$
$$= [3 \cdot (t_2 - t_1)\,\vec{i} + 2 \cdot (t_2^2 - t_1^2)\,\vec{k}]\,\text{m}$$

Sustituimos $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(5\ \text{s}) - \vec{r}\,(2\ \text{s}) = [3 \cdot (5-2)\,\vec{i} + 2 \cdot (5^2 - 2^2)\,\vec{k}]\ \text{m} = \mathbf{9\,\vec{i} + 42\,\vec{k}\ \ m}$$

9 La velocidad media de los trenes de la línea 1 del metro de Madrid es de 21,4 km/h y su longitud se recorre en 55 min 30 s. ¿Cuál es su longitud?

Pasamos la velocidad y el tiempo a unidades del SI:

$$v_\text{m} = 25{,}13\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 6{,}98\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\,;\ \ \Delta t = 57\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 3420\ \text{s}$$

Despejando de la definición de la velocidad media, sustituimos y calculamos:

$$v_\text{m} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v_\text{m} \cdot \Delta t = 6{,}98\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 3420\,\cancel{\text{s}} = 2387\ \text{m} = \mathbf{23{,}87\ km}$$

10 El AVE circula a 300 km/h y una revisora se mueve por el pasillo a 6 km/h hacia la cola del tren.

a) ¿Hacia dónde se mueve la revisora, hacia la derecha o hacia la izquierda (según la fotografía)?

b) ¿Cuál es su velocidad para una observadora fuera del tren?

La velocidad solo tiene sentido con respecto a un determinado sistema de referencia. Tomaremos como sentido positivo el del avance del tren, según la fotografía, hacia la derecha.

En nuestro caso, la velocidad de la revisora relativa al tren es $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{R}-\text{T}}$, de módulo $v_{\text{R-T}} = 6$ km/h, y su sentido es hacia la cola del tren, hacia a la izquierda.

La velocidad del tren respecto a las vías es $\vec{v}_{\text{sis}} = \vec{v}_{\text{T}-\text{V}}$, de módulo $v_{\text{T-V}} = 300$ km/h, y su sentido es hacia la cabeza del tren, hacia la derecha.

Para un observador externo al tren y ligado a las vías, la velocidad de la revisora será $\vec{v}_{\text{obj}}$:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{obj}} - \vec{v}_{\text{sis}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{obj}} = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{v}_{\text{sis}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{R}-\text{V}} = \vec{v}_{\text{T}-\text{V}} + \vec{v}_{\text{R}-\text{T}}$$

En un movimiento rectilíneo solo necesitamos una coordenada (x), según la fotografía:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{\text{R}-\text{T}} = -6\,\vec{i}\ \text{km/h}\\ \vec{v}_{\text{T}-\text{V}} = +300\,\vec{i}\ \text{km/h}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_{\text{R}-\text{V}} = +300\,\vec{i}\ \text{km/h} + (-6\,\vec{i}\ \text{km/h}) = \mathbf{+294\,\vec{i}\ km/h}$$

Esto significa que, visto desde el exterior del tren, la revisora se mueve en el mismo sentido que el tren, pero a 294 km/h.

Según las ilustraciones y el sistema de referencia elegido:

a) La revisora se mueve hacia la **derecha**.

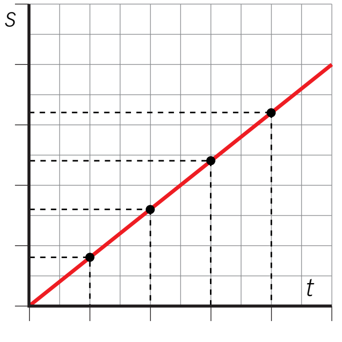
b) $+$**294 $\vec{i}$ km/h**.

11 Para cada movimiento, representa *s* frente a *t*. Analiza la gráfica e indica la relación entre las variables.

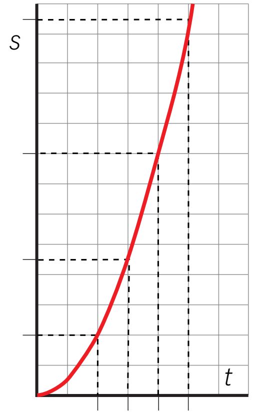
Respuesta abierta en función de los datos obtenidos en la experiencia.

Para el MRU, la gráfica debería ser de la forma que presenta la figura a. La relación entre *s* y *t* es de proporcionalidad directa. Para el MRUA, la gráfica debería ser de la forma que presenta la figura b.
La relación entre *s* y *t* es cuadrática.

A



B

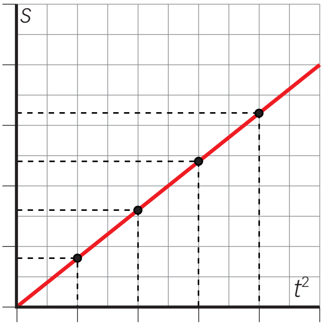


12 En el MRU, ¿se ha mantenido constante la velocidad? Justifícalo. Si no es así, explica el motivo.

En un MRU la velocidad debe permanecer constante, pero experimentalmente esto no es fácil de conseguir. La bola parte del reposo y debe iniciar el movimiento. Además, debe tenerse en cuenta que el rozamiento con el riel la frena, y al inclinarlo se puede cometer el error de inclinarlo demasiado y así provocar que la bola aumente su velocidad.

13 **En el MRUA, representa gráficamente *s* frente a t^2. Deduce de ellos la aceleración del movimiento.**

Respuesta en función de los datos obtenidos en la experiencia. La gráfica debería tener la forma que se ve a la derecha.



En este MRUA, la relación entre el espacio recorrido, *s*, y el tiempo, *t*, viene dada por:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

El enunciado pide representar *s* frente a t^2. La relación entre ambas variables es del tipo $y = m \cdot x$, donde m representa la pendiente de la recta y x es t^2.

Por tanto, para calcular el valor de la aceleración debemos medir sobre la gráfica la pendiente de la recta y multiplicar por 2:

$$m = \frac{1}{2} \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = 2 \cdot m$$

14 **Compara los datos de los diferentes grupos de la clase y determina la relación entre:**

a) La velocidad del MRU y la altura desde la que se deja caer la bola del péndulo.

b) La aceleración del MRUA y la inclinación del perfil en «V» de aluminio.

Respuesta en función de los datos obtenidos en la experiencia.

a) Comparando los diferentes resultados obtenidos, los alumnos deben concluir que, cuanto mayor es la altura desde la que se deja caer el péndulo, mayor es la velocidad que adquiere la bola en su MRU.

b) Comparando los diferentes resultados obtenidos, los alumnos deben concluir que, cuanto mayor es la inclinación del perfil, mayor es la aceleración que adquiere la bola en su MRUA.

15 **Imagina que te llevan en coche por una curva con forma de arco de circunferencia con velocidad constante. Como te han vendado los ojos y tapado los oídos, solo puedes notar que te estás moviendo porque hay aceleración (si el movimiento fuese uniforme y en línea recta, no te darías cuenta).**

a) ¿De qué factores depende que notes más o menos que el coche está tomando una curva? O, dicho de otra manera, ¿de qué depende la aceleración normal de este movimiento circular uniforme?

b) ¿Qué magnitudes físicas relacionadas con la trayectoria y la forma de recorrerla influyen en que se note más el cambio de dirección?

La curva se notará más a igualdad de otros factores cuanto más cerrada sea, lo que se mide mediante el parámetro radio de curvatura, *R*. Cuanto mayor sea *R*, más abierta es la curva y menos se nota. Por otro lado, si el radio de curvatura es el mismo, la curva se notará más cuanto más rápido se tome. En resumen:

$$\text{La curva se nota más (el cambio de dirección)} \begin{cases} \text{Cuanto mayor sea } v \\ \text{Cuanto menor sea } R \end{cases}$$

16 ¿Qué factor influye más en a_N, la velocidad o el radio de la curva? Supón que decides duplicar tu velocidad en una curva (de v a $2 \cdot v$) y, para compensar, pides al Ministerio de Fomento que haga la curva más abierta, duplicando también su radio (de R a $2 \cdot R$).

a) Calcula la expresión del módulo de la aceleración normal antes y después de duplicar la velocidad.

b) Halla los valores numéricos de a_N para una curva de 20 m de radio tomada a 60 km/h.

c) Averigua el valor de a_N para otra curva de 40 m de radio que se toma a una velocidad de 120 km/h. Compara los resultados con los obtenidos en el apartado anterior.

a) Como la aceleración normal tiene módulo $a_N = \frac{v^2}{R}$, al duplicar la velocidad se transforma en $a'_N = \frac{(2 \cdot v)^2}{R} = 4 \cdot \frac{v^2}{R} = 4 \cdot a_N$, es decir, es cuatro (y no dos) veces mayor.

Sin embargo, al duplicar el radio:

$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{2 \cdot R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{1}{2} \cdot a_N$, la aceleración normal solo se divide por dos.

En resumen, si duplicamos simultáneamente la velocidad y el radio de la curva, la aceleración normal aún sería el doble de la inicial.

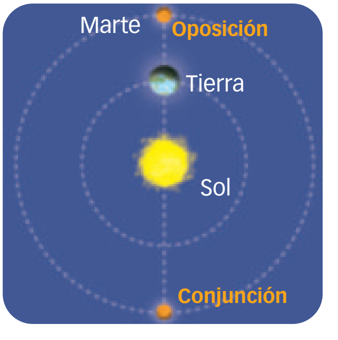
$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_N = \frac{(2 \cdot v)^2}{2 \cdot R} = 2 \cdot \frac{v^2}{R} = 2 \cdot a_N$$

b) $$\left.\begin{array}{l} v = 60 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ s} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{\text{km}}} = 16{,}\hat{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ R = 20\ \text{m} \end{array}\right\} \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(16{,}\hat{6}\ \text{m/s})^2}{20\ \text{m}} = \mathbf{13{,}\hat{8}\ \frac{m}{s^2}}$$

c) Teniendo en cuenta el razonamiento del apartado a) y el resultado del apartado b), si duplicamos simultáneamente la velocidad y el radio de la curva, la aceleración normal aún sería el doble de la inicial.

$$a'''_N = 2 \cdot a_N = 2 \cdot 13{,}\hat{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{27{,}\hat{7}\ \frac{m}{s^2}}$$

17 Observa la figura. El Sol, la Tierra y Marte pueden estar alineados. Si la Tierra está entre Marte y el Sol, se llama oposición. Si el Sol está entre Marte y la Tierra, se llama conjunción. Calcula el módulo de la aceleración relativa de Marte para un observador en la Tierra:



a) En oposición. b) En conjunción.

Datos: $T_{\text{Marte}} = 687$ días, $T_{\text{Tierra}} = 365{,}25$ días; $r_{\text{Marte}} = 2{,}3 \cdot 10^8$ km, $r_{\text{Tierra}} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Pasamos los datos a unidades del sistema internacional:

$$T_{\text{Tierra}} = 365{,}25\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 3{,}16 \cdot 10^7\ \text{s}$$

$$T_{\text{Marte}} = 687\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 5{,}94 \cdot 10^7\ \text{s}$$

$$r_{\text{Tierra}} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m};\ r_{\text{Marte}} = 2{,}3 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

Estamos trabajando en un sistema de referencia no inercial, por tanto: $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{obj} - \vec{a}_{sis}$.

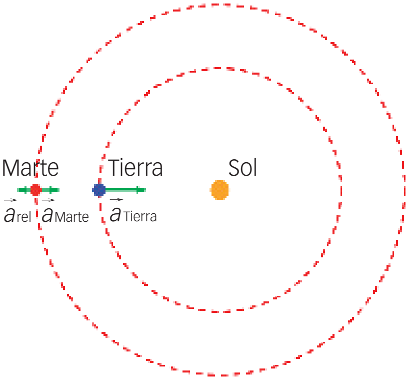
a) En oposición, ver figura. En este caso, calculamos la aceleración relativa de Marte (objeto) para un observador que está en la Tierra (sistema).

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{Marte} - \vec{a}_{Tierra}$$

Como todas las aceleraciones son centrípetas:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi \cdot R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 \cdot R}{T^2}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_{Tierra} = \dfrac{4\pi^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{(3{,}16 \cdot 10^7\ \text{s})^2}\ \vec{i} = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \vec{a}_{Marte} = \dfrac{4\pi^2 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{(5{,}94 \cdot 10^7\ \text{s})^2}\ \vec{i} = 2{,}57 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$



Marte en oposición.

Sustituimos:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{Marte} - \vec{a}_{Tierra} = 2{,}57 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5{,}93 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -3{,}36 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como puede verse en la figura, este resultado significa que un observador en la Tierra vería la trayectoria de Marte con el centro dirigido en sentido contrario a donde está el Sol. (Esto sin tener en cuenta la rotación de la Tierra sobre su eje). El módulo del vector es:

$$|\vec{a}_{rel}| = \mathbf{3{,}36 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}}$$

b) En conjunción, ver figura. Los módulos de las aceleraciones no varían, solo tenemos que tener en cuenta el cambio de signo. En este caso:

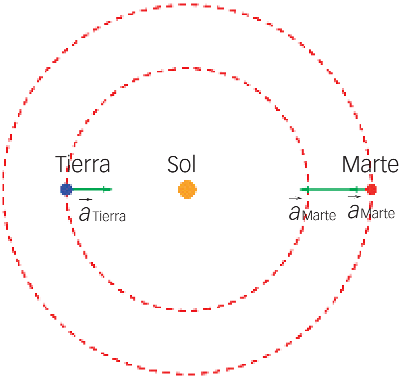
$$\vec{a}_{Tierra} = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{Marte} = -2{,}57 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Sustituimos en cada caso, $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{Marte} - \vec{a}_{Tierra}$:

$$\vec{a}_{rel} = -2{,}57 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5{,}93 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{rel} = -8{,}52 \cdot 10^{-3}\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Marte en conjunción.

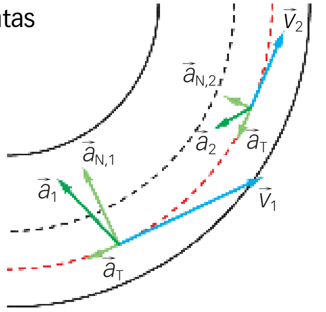
El resultado significa, como puede verse en la figura, que un observador en la Tierra vería la trayectoria de Marte con el centro dirigido hacia el mismo lado de donde está el Sol. (Esto sin tener en cuenta la rotación de la Tierra sobre su eje). El módulo del vector es:

$$|\vec{a}_{rel}| = \mathbf{8{,}52 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}}$$

Nota: el problema podría haber sido resuelto también en cualquier otro eje. Se escoge el eje OX por simplificar.

18 Adapta el dibujo del cuadro «Aceleración de un móvil en distintas situaciones», punto D, al caso en que se toma la misma curva, pero frenando.

Si la curva se toma frenando, el módulo de la velocidad disminuye. El móvil toma la curva variando la dirección del vector velocidad.



19 Clasifica estos movimientos usando las categorías anteriores:

a) Una estudiante da siete vueltas a ritmo constante a una pista de atletismo.
b) Otro estudiante corre una carrera de 100 m.
c) Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra en una órbita perfectamente circular a velocidad constante dando una vuelta completa cada 11 horas.
d) Un trabajador va todos los días (laborables) a trabajar en tren recorriendo 35 km en 30 minutos.
e) Un autobús recorre un tramo recto de autopista a una velocidad de 90 km/h.
f) Movimiento de un punto del tambor de una lavadora cuando esta comienza a centrifugar.

a) La estudiante encontrará tramos con movimiento rectilíneo uniforme ($a_T = 0$; $a_N = 0$), y otros tramos con movimiento circular uniforme ($a_T = 0$; $a_N =$ constante $\neq 0$).
b) Movimiento rectilíneo no uniforme ($a_T \neq 0$; $a_N = 0$).
c) Movimiento circular uniforme ($a_T = 0$; $a_N =$ constante $\neq 0$).
d) Cabe suponer que se trata de un movimiento general curvilíneo y no uniforme ($a_T \neq 0$; $a_N \neq 0$).
e) Movimiento rectilíneo uniforme ($a_T = 0$; $a_N = 0$).
f) Movimiento circular uniformemente acelerado ($a_T =$ constante $\neq 0$; $a_N \neq 0$).

ACTIVIDADES FINALES

Posición

20 Describe un viaje en coche o en tren con una tabla de distancias en kilómetros y los tiempos de paso por cada posición. Especifica debidamente el origen del sistema de referencia de tu descripción.

Respuesta modelo. Supongamos que viajamos en coche. Podemos tomar como origen el punto de salida y poner el contador de kilómetros a cero. Además, deberíamos anotar la hora que marca el reloj del coche justo en el instante en que abandonamos el aparcamiento.

Punto kilométrico	Hora
0	09:35
15	09:45
…	…

Después, con cierta frecuencia, anotar en una libreta la hora que marca el reloj y los kilómetros que indica el contador.

21 Los vectores de posición de un móvil en dos instantes dados son:

- $t_1 \rightarrow \vec{r}_1 = 5{,}25\,\vec{i} - 2{,}5\,\vec{j}\,\text{m}$
- $t_2 \rightarrow \vec{r}_2 = 7{,}5\,\vec{i} + 2{,}5\,\vec{j}\,\text{m}$

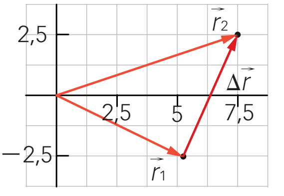
Representa en tu cuaderno dichos vectores, calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y su módulo.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (7{,}5\,\vec{i} + 2{,}5\,\vec{j})\ \text{m} - (5{,}25\,\vec{i} - 2{,}5\,\vec{j})\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r} = \left[(7{,}5 - 5{,}25)\,\vec{i} + \big(2{,}5 - (-2{,}5)\big)\,\vec{j}\right]\text{m} = \mathbf{2{,}25\,\vec{i} + 5\,\vec{j}\ m}$$

$$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{2{,}25^2 + 5^2}\ \text{m}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{30{,}0625}\ \text{m} \simeq \mathbf{5{,}48\ m}$$



22 Una estrella está situada en $\vec{r}_E = (6\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot 10^{10}$ m y un planeta en $\vec{r}_P = (-\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}) \cdot 10^{10}$ m, respecto a un cierto sistema de referencia.

a) ¿Cuál es el vector $\vec{r}_{EP}$ que va de la estrella al planeta? ¿Cuánto vale su módulo? ¿Qué significado físico tiene?

b) ¿Cuál es el vector $\vec{r}_{PE}$ que va del planeta a la estrella?

a) Escribimos los vectores de posición de E y P:

$$\vec{r}_E = (6\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m; y } \vec{r}_P = (-\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m}$$

El vector con origen en la estrella al planeta es $\vec{r}_{EP}$. Este es el vector de posición del planeta en un sistema de referencia con origen en la estrella. Calculamos:

$$\vec{r}_{EP} = \vec{r}_P - \vec{r}_E = (-\vec{i} + 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m} - (6\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{EP} = \mathbf{(-7\,\vec{i} + 13\,\vec{j} - 4\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ m}$$

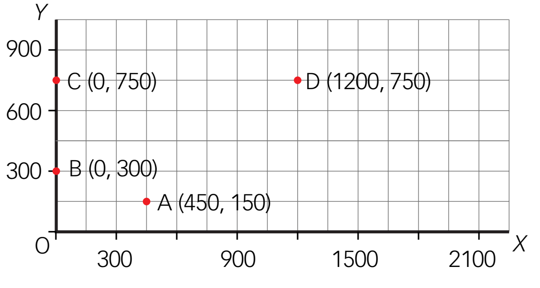
Calculamos su módulo. El módulo del vector, $|\vec{r}_{EP}|$, representa la distancia entre la estrella y el planeta:

$$|\vec{r}_{EP}| = \sqrt{(-7 \cdot 10^{10})^2 + (13 \cdot 10^{10})^2 + (-4 \cdot 10^{10})^2}\ \text{m} = \sqrt{2{,}34 \cdot 10^{22}}\ \text{m} \simeq \mathbf{1{,}53 \cdot 10^{11}\ m}$$

b) El vector con origen en el planeta y extremo en la estrella es:

$$\vec{r}_{PE} = \vec{r}_E - \vec{r}_P = -(\vec{r}_P - \vec{r}_E) = -\vec{r}_{EP} = \mathbf{(7\,\vec{i} - 13\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ m}$$

23 Calcula el vector desplazamiento y su módulo para cada uno de los tramos del recorrido de un vehículo teledirigido que realiza el desplazamiento entre los puntos A, B, C y D de la figura, en ese orden. Las distancias están expresadas en metros.



- Desplazamiento AB:

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (300\,\vec{j})\ \text{m} - (450\,\vec{i} + 150\,\vec{j})\ \text{m} = \mathbf{-450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}\ m}$$

$$|\Delta\vec{r}_{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{(-450)^2 + (150)^2}\ \text{m} = \sqrt{225\,000}\ \text{m} \simeq \mathbf{474{,}3\ m}$$

- Desplazamiento BC:

$$\Delta\vec{r}_{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 750\,\vec{j} - 300\,\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r}_{BC} = (750 - 300)\,\vec{j}\text{ m} = \mathbf{450\,\vec{j}\text{ m}}$$

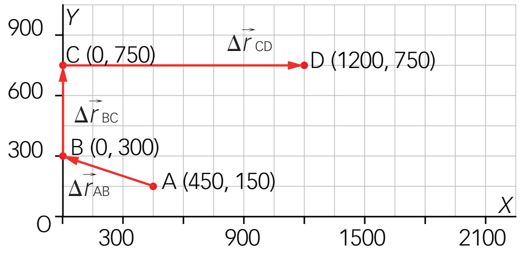
$$|\Delta\vec{r}_{BC}| = |\vec{r}_C - \vec{r}_B| = \sqrt{450^2}\text{ m} = \mathbf{450\text{ m}}$$

- Desplazamiento CD:

$$\Delta\vec{r}_{CD} = \vec{r}_D - \vec{r}_C = (1200\,\vec{i} + 750\,\vec{j}) -)750\,\vec{j})$$

$$\Delta\vec{r}_{CD} = [1200\,\vec{i} + (750 - 750)\,\vec{j}]\text{ m} = \mathbf{1200\,\vec{i}\text{ m}}$$

$$|\Delta\vec{r}_{CD}| = |\vec{r}_D - \vec{r}_C| = \sqrt{1200^2}\text{ m} = \mathbf{1200\text{ m}}$$



Velocidad

24 ¿Bajo qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

La velocidad media solo puede ser igual a la instantánea en los movimientos uniformes, es decir, con módulo de la velocidad constante: v = constante.

25 Observa la figura y contesta.

a) ¿Qué lugares de la trayectoria de la figura son imposibles de recorrer sin aceleración?

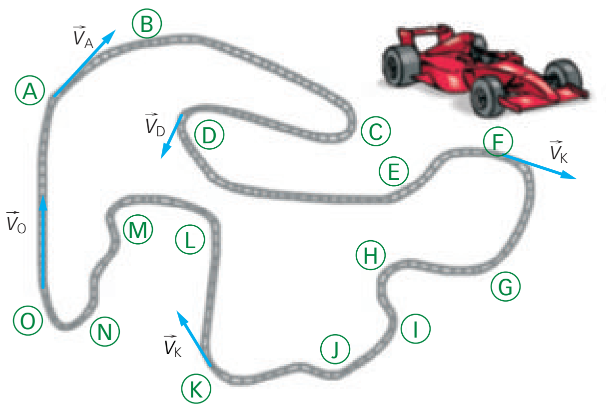
b) ¿En qué lugares es posible el movimiento uniforme?

c) ¿Dónde puede haber movimiento sin ningún tipo de aceleración?

d) Dibuja un posible vector velocidad en cinco puntos.

a) Todos los tramos que no sean rectilíneos, y aparentemente ninguno de los marcados es rectilíneo.

b) Un movimiento uniforme es posible en cualquier punto de la trayectoria; la forma de la trayectoria no condiciona, en principio, el módulo de la velocidad.



c) Solo en las rectas.

d) Respuesta libre. Proponemos una solución con cinco vectores velocidad.

26 ¿Cómo es el vector velocidad media para una vuelta completa de cualquier trayectoria cerrada? ¿Depende del sistema de referencia? ¿Dice el primer resultado algo sobre el valor de la velocidad media?

- Según la definición del vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}}{\Delta t}$$

En cualquier vuelta completa la posición final coincide con la posición inicial: $\vec{r}_{\text{final}} = \vec{r}_{\text{inicial}}$. Por tanto, $\vec{v}_{\text{m}} = 0$.

- Esto es cierto para cualquier sistema de referencia.
- Del primer resultado no podemos deducir nada sobre el valor de la velocidad media. Sin embargo, según la definición de velocidad media, se deduce que la velocidad media no puede ser nula, ya que la longitud de la trayectoria no es nula.

27 ¿Cómo se mueve un cuerpo si la velocidad media y la instantánea son iguales en todo momento?

Si la velocidad media es igual que la instantánea en todo momento, el movimiento tiene que ser uniforme, de otro modo no hay garantía de que coincidan. No hay ningún motivo para que un cambio arbitrario en la velocidad instantánea se refleje en el mismo cambio en la velocidad media para un intervalo cualquiera.

Nota: así como en un instante hay una única velocidad instantánea, la velocidad media depende del intervalo en el que se defina.

28 ¿Serviría de algo hablar de las componentes tangencial y normal de la velocidad?

El vector velocidad se define de modo que sea tangente a la trayectoria. La velocidad es un vector puramente tangencial, por tanto, la componente normal siempre sería nula. De ahí que no tenga sentido hacer distinción entre la componente normal y la tangencial de la velocidad.

29 Alicia dice que ha visto moverse un avión en línea recta a 980 km/h. Benito, por su parte, sostiene que el avión estaba inmóvil. ¿Es posible que se refieran al mismo avión? ¿Cómo?

Por supuesto que sí, la velocidad es un concepto relativo, depende del sistema de referencia utilizado.

Alicia está usando un sistema de referencia ligado al suelo, por ejemplo, mientras Benito prefiere emplear otro ligado al avión (y, claro, la velocidad del avión respecto de sí mismo es cero).

Eso puede parecer absurdo en la vida cotidiana, pero no en física, donde la libertad y conveniencia de elegir diferentes sistemas de referencia es muy importante.

30 La ganadora de una carrera ciclista recorre los últimos 10 m en 0,72 s.

a) ¿Cuál es su velocidad media en ese tramo?

b) Exprésala en las unidades más comunes, km/h.

a) El cálculo es sencillo:

$$v_{\text{m}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\ \text{m}}{0{,}72\ \text{s}} = \mathbf{13{,}\hat{8}\ \frac{m}{s}}$$

b) $$13{,}\hat{8}\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1000\ \cancel{\text{m}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \text{h}} = \mathbf{50\ \frac{km}{h}}$$

31 **Un acantilado nos devuelve eco retardando nuestra voz en 0,4 s. Sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s, ¿a qué distancia está el acantilado?**

Despejamos el espacio recorrido de la expresión de la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v_m \cdot \Delta t = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}4\ \text{s} = 136\ \text{m}$$

Como el espacio recorrido es de ida y vuelta, la distancia a la que se encuentra el acantilado será:

$$\Delta s = 2 \cdot d \Rightarrow d = \frac{\Delta s}{2} = \frac{136\ \text{m}}{2} = \mathbf{68\ m}$$

32 **Se suele elegir la superficie de la Tierra como sistema de referencia fijo respecto al que medir, pero ¿está realmente quieta la Tierra?**

a) Calcula la velocidad con que se mueve un punto del ecuador en su giro alrededor del eje.

b) Calcula la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol, sabiendo que un rayo de luz desde el Sol a la Tierra tarda aproximadamente 8 minutos y 19 segundos.

c) ¿Cómo es posible que vayamos a esa velocidad sin enterarnos?

Datos: radio ecuatorial de la Tierra: 6378 km;
v_{luz} = 299 792 km/s; 1 año = 365,25 días; 1 día = 24 h.

a) La Tierra hace un giro completo sobre sí misma en un día.

La circunferencia de la Tierra en el ecuador es:

$$\Delta s = L = 2\pi \cdot R_{\text{ecuatorial}} = 2\pi \cdot 6378\ \text{km} = 40074\ \text{km}$$

Y la velocidad (lineal) de giro $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{L}{1\ \text{día}}$:

$$v_{\text{rot}} = \frac{40\,074\ \text{km}}{2\ \text{h}} = \mathbf{1670\ \frac{km}{h}} = 464\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol en un año.

Suponiendo que la órbita fuera circular (solo lo es aproximadamente), tomemos como radio el espacio que recorre la luz en 8 minutos y 19 segundos a velocidad c:

$$R = c \cdot t = 299792\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \left(8\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + 19\ \text{s}\right) = 149\,600\,000\ \text{km}$$

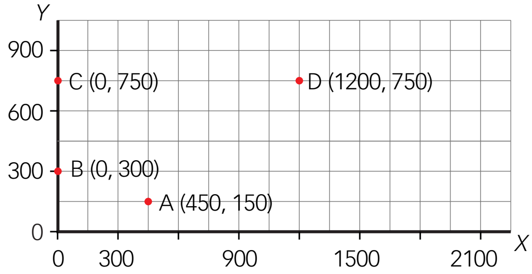
Y la velocidad de traslación de la Tierra es:

$$v_{\text{trasl}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot R_{\text{órbita}}}{1\ \text{año}} = \frac{2\pi \cdot 149\,600\,000\ \text{km}}{365{,}25\ \cancel{\text{día}} \cdot 24\frac{\text{h}}{\cancel{\text{día}}}} = \mathbf{1{,}07 \cdot 10^5\ \frac{km}{h}} = 29{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

c) Lejos de estar «inmóviles», tenemos un complicadísimo movimiento en el que se mezclan una rotación a 462 m/s con una traslación a 29 800 m/s y aun otros movimientos del Sol como una estrella más en el conjunto de la galaxia…

¿Por qué no los notamos? En realidad, nunca notamos la velocidad por sí misma (¿respecto a qué?), sino la aceleración. Las aceleraciones de estos giros son muy pequeñas comparadas con la aceleración de la gravedad.

33 Para el mismo vehículo teledirigido del ejercicio 23:



a) Calcula el vector velocidad media y su módulo para cada tramo sabiendo que los tiempos empleados en recorrer cada tramo son: de A a B 15 min, de B a C 40 min y de C a D 28 min.

b) Calcula la velocidad y el vector velocidad media totales.

Recordamos los resultados que obtuvimos en el ejercicio 23:

$$\Delta \vec{r}_{AB} = -450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}\ \text{m};\ |\Delta \vec{r}_{AB}| \simeq 474{,}3\ \text{m}$$

$$\Delta \vec{r}_{BC} = 450\,\vec{j}\ \text{m};\ |\Delta \vec{r}_{BC}| = 450\ \text{m}$$

$$\Delta \vec{r}_{CD} = 1200\,\vec{i}\ \text{m};\ |\Delta \vec{r}_{CD}| = 1200\ \text{m}$$

Convertimos cada intervalo de tiempo a unidades del SI:

$$\Delta t_{AB} = 15\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 900\ \text{s}$$

$$\Delta t_{BC} = 45\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 2400\ \text{s}$$

$$\Delta t_{CD} = 28\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 1680\ \text{s}$$

a) Calculamos el vector velocidad media y su módulo para cada tramo:

- $$\vec{v}_{AB} = \frac{\Delta \vec{r}_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{-450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}\ \text{m}}{900\ \text{s}} = \mathbf{-0{,}5\,\vec{i} + 0{,}1\hat{6}\,\vec{j}\ \frac{m}{s}}$$

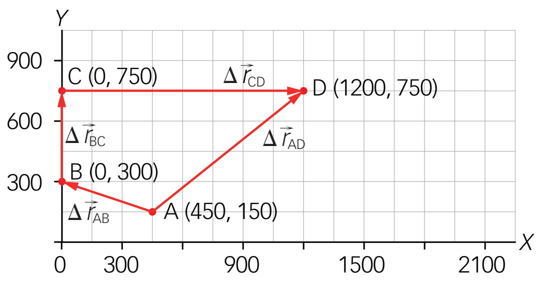
  $$|\vec{v}_{AB}| = \frac{|\Delta \vec{r}_{AB}|}{\Delta t_{AB}} = \frac{474{,}3\ \text{m}}{900\ \text{s}} = \mathbf{0{,}527\ \frac{m}{s}}$$

- $$\vec{v}_{BC} = \frac{\Delta \vec{r}_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{450\,\vec{j}\ \text{m}}{2400\ \text{s}} = \mathbf{0{,}1875\,\vec{j}\ \frac{m}{s}}$$

  $$|\vec{v}_{BC}| = \frac{|\Delta \vec{r}_{BC}|}{\Delta t_{BC}} = \frac{450\ \text{m}}{2400\ \text{s}} = \mathbf{0{,}1875\ \frac{m}{s}}$$

- $$\vec{v}_{CD} = \frac{\Delta \vec{r}_{CD}}{\Delta t_{CD}} = \frac{1200\,\vec{i}\ \text{m}}{1680\ \text{s}} = \mathbf{0{,}7143\,\vec{i}\ \frac{m}{s}}$$

  $$|\vec{v}_{CD}| = \frac{|\Delta \vec{r}_{CD}|}{\Delta t_{CD}} = \frac{1200\ \text{m}}{1680\ \text{s}} = \mathbf{0{,}7143\ \frac{m}{s}}$$



b) Calculamos el vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}_{AD}}{\Delta t_{total}} = \frac{\vec{r}_D - \vec{r}_A}{\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} + \Delta t_{CD}} = \frac{(1200\,\vec{i} + 750\,\vec{j})\ \text{m} - (450\,\vec{i} + 150\,\vec{j})\ \text{m}}{(900 + 2400 + 1680)\ \text{s}}$$

$$\vec{v}_m = \frac{[(1200 - 450)\,\vec{i} + (750 - 150)\,\vec{j}]\text{m}}{4980\ \text{s}} = \mathbf{(0{,}15\,\vec{i} + 0{,}12\,\vec{j})\frac{m}{s}}$$

Calculamos la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t_{Total}} = \frac{|\Delta \vec{r}_{AB}| + |\Delta \vec{r}_{BC}| + |\Delta \vec{r}_{CD}|}{\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} + \Delta t_{CD}} = \frac{(474{,}3 + 450 + 1200)\ \text{m}}{(900 + 2400 + 1680)\,\text{s}} = \mathbf{0{,}427\ \frac{m}{s}}$$

Nota: observamos que si calculamos el módulo del vector velocidad media:

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{(0{,}15)^2 + (0{,}12)^2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}193\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

No coincide con la velocidad media, $v_m = 0{,}427$ m/s, ya que Δs es la longitud de la trayectoria realizada; mientras que $|\Delta \vec{r}_{AD}|$ es la distancia en línea recta entre los puntos inicial y final.

34 Tras el lanzamiento de una falta, la posición de un balón de fútbol medida desde el punto en el que se le golpea cambia desde $5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ m hasta $5{,}3\,\vec{i} + 1{,}8\,\vec{j} + 3{,}1\,\vec{k}$ m en un intervalo de tiempo $\Delta t = 0{,}02$ s.

Escribe el vector velocidad del balón durante ese intervalo y calcula su módulo.

Calculamos el vector velocidad media, o simplemente el vector velocidad, ya que la variación de tiempo es muy pequeña:

$$\Delta t = 0{,}02\ \text{s}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}}{\Delta t} = \frac{(5{,}3\,\vec{i} + 1{,}8\,\vec{j} + 3{,}1\,\vec{k})\,\text{m} - (5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k})\ \text{m}}{0{,}02\ \text{s}}$$

$$\vec{v} = \frac{[(5{,}3 - 5)\,\vec{i} + (1{,}8 - 2)\,\vec{j} + (3{,}1 - 3)\,\vec{k}]\,\text{m}}{0{,}02\ \text{s}} = \mathbf{15\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 5\,\vec{k}\ \frac{m}{s}}$$

Su módulo es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + 5^2}\ \text{m/s} = \sqrt{350}\ \text{m/s} = 18{,}7\ \text{m/s} \simeq \mathbf{67\ km/h}$$

35 Un protón viaja con una velocidad $(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k}) \cdot 10^5$ m/s y pasa por el origen de coordenadas en $t = 9{,}0$ s.

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad en el origen?

b) ¿Qué valor podemos dar para su posición en $t = 9{,}7$ s?

c) ¿Has tenido que hacer alguna suposición para calcular la posición?

Para $t = 9{,}0$ s; $\vec{r} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ m; $\vec{v} = (3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k}) \cdot 10^5$ m/s.

a) El módulo de la velocidad en el origen es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3 \cdot 10^5)^2 + (2 \cdot 10^5)^2 + (-4 \cdot 10^5)^2}\ \text{m/s} = \sqrt{29 \cdot 10^{10}}\ \text{m/s} = \mathbf{5{,}395 \cdot 10^5\ m/s}$$

b) Para poder calcular su posición a los 9,7 s, es decir, 0,7 s más tarde, $\Delta t = 0{,}7$ s, vamos a suponer que la velocidad es constante.

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{v} \cdot \Delta t = [(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k}) \cdot 10^5\ \text{m/s}] \cdot 0{,}7\ \text{s} = (2{,}1\,\vec{i} + 1{,}4\,\vec{j} - 2{,}8\,\vec{k}) \cdot 10^5\ \text{m}$$

Como $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_{\text{fin}}) - \vec{r}(t_{\text{ini}}) \Rightarrow \vec{r}(t_{\text{fin}}) = \Delta\vec{r} + \vec{r}(t_{\text{ini}})$. Por tanto:

$$\vec{r}(t_{\text{fin}}) = \Delta\vec{r} + \vec{r}(9{,}0\ \text{s}) = (2{,}1\,\vec{i} + 1{,}4\,\vec{j} - 2{,}8\,\vec{k}) \cdot 10^5\ \text{m} + (0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k})\ \text{m}$$
$$\vec{r}(t_{\text{fin}}) = \mathbf{(2{,}1\,\vec{i} + 1{,}4\,\vec{j} - 2{,}8\,\vec{k}) \cdot 10^5\ m}$$

Como la posición del protón a los 9 s es cero, la posición de este a los 9,7 s coincide con el desplazamiento.

c) Hemos tenido que hacer una suposición con respecto a su movimiento: hemos supuesto que el protón se desplazaba con una velocidad constante.

36 Calcula la velocidad en el instante $t = 2$ s de un móvil cuyo vector de posición es $\vec{r}(t) = (4 \cdot t - 4 \cdot t^2)\,\vec{i}$ m.

Partimos del vector de posición:

$$\vec{r}(t) = (4 \cdot t - 4 \cdot t^2)\,\vec{i}\ \text{m}$$

Queremos calcular la velocidad en el instante $t = 2$ s. Partimos de la definición de velocidad como el límite de la variación del vector posición respecto del tiempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Sustituimos y calculamos:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[4 \cdot (t + \Delta t) - 4 \cdot (t + \Delta t)^2\right]\vec{i} - (4 \cdot t - 4 \cdot t^2)\,\vec{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\cancel{4 \cdot t} + 4 \cdot \Delta t - 4\left(t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cancel{- 4 \cdot t} + 4 \cdot t^2\right]\vec{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[4 \cdot \Delta t \cancel{- 4 \cdot t^2} - 8 \cdot t \cdot \Delta t - 4 \cdot (\Delta t)^2 \cancel{+ 4 \cdot t^2}\right]\vec{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[4 \cdot \Delta t - 8 \cdot tv \cdot \Delta t - 4 \cdot (\Delta t)^2\right]\vec{i}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(4 - 8 \cdot t - 4 \cdot \Delta t) \cdot \cancel{\Delta t}\,\vec{i}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (4 - 8 \cdot t - 4 \cdot \Delta t)\,\vec{i} = (4 - 8 \cdot t - 4 \cdot 0)\,\vec{i} = (4 - 8 \cdot t)\,\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para $t = 2$ s:

$$\vec{v}(t = 2) = (4 - 8 \cdot 2)\,\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{-12\,\vec{i}\ \frac{m}{s}}$$

37 El vector de posición de un cuerpo viene dado por la expresión:

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (t^2 + 1)\,\vec{j}\ \text{m (con } t \text{ en segundos y } r \text{ en metros).}$$

a) ¿En qué región del espacio se mueve: en un plano, en una recta...?

b) Calcula la posición en $t = 2$ s y en $t = 2{,}5$ s.

c) Deduce la ecuación de la trayectoria.

d) Calcula el vector velocidad media entre ambos instantes.

a) El movimiento es **en un plano**, pues una de las tres componentes tiene un valor constante, en concreto, la tercera componente es nula. Si $z = 0$ en cualquier instante el movimiento se da en el plano x-y. A partir de ahora nos basta trabajar con el vector bidimensional:

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (t^2 + 1)\,\vec{j}\ \text{m}$$

b) $\vec{r}(t = 2\ \text{s}) = \left[2\,\vec{i} + (2^2 + 1)\,\vec{j}\right]\text{m} = \left(\mathbf{2\ i} + \mathbf{5\ j}\right)\ \mathbf{m}$

$\vec{r}(t = 2{,}5\ \text{s}) = \left[2{,}5\,\vec{i} + (2{,}5^2 + 1)\,\vec{j}\right]\text{m} = \left(\mathbf{2{,}5}\ \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{7{,}25}\ \vec{\mathbf{j}}\right)\ \mathbf{m}$

c) Para obtener la ecuación de la trayectoria, fijémonos en que:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = x^2 + 1$$

Es decir, la ecuación es $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$, que no es una recta, sino una parábola.

d) De la definición de velocidad media:

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Calculando el vector desplazamiento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 2{,}5\ \text{s}) - \vec{r}(t = 2\ \text{s}) = \left(2{,}5\,\vec{i} + 7{,}25\,\vec{j}\right) - \left(2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}\right) = \left(0{,}5\,\vec{i} + 2{,}25\,\vec{j}\right)\text{m}$$

Sustituyendo:

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\left(0{,}5\,\vec{i} + 2{,}25\,\vec{j}\right)\text{m}}{0{,}5\ \text{s}} = \left(\mathbf{1}\ \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{4{,}5}\ \vec{\mathbf{j}}\right)\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

38 Un móvil se mueve según la siguiente ley de movimiento:

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (2 + t)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}\ \text{m}$$

Calcula el vector velocidad media durante los 10 primeros segundos.

Partimos de la definición del vector velocidad media $\vec{v}_{\text{media}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{\Delta t}$:

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(10\ \text{s}) - \vec{r}(0\ \text{s})}{10\ \text{s} - 0\ \text{s}}$$

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\left[10\,\vec{i} + (2 + 10)\,\vec{j} + 10^2\,\vec{k}\right] - \left[0\,\vec{i} + (2 + 0)\,\vec{j} + 0^2\,\vec{k}\right]}{10\ \text{s}} = \left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{10}\ \vec{\mathbf{k}}\right)\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

39 Un ciclista circula a 20 km/h y una motocicleta le rebasa a 70 km/h. ¿Qué velocidad observa el ciclista?

Antes de empezar definimos los vectores usando como referencia la dirección de la carretera por la que circulan y el sentido positivo en sentido de la marcha del ciclista. Como la motocicleta rebasa al ciclista, lleva el mismo sentido. Las unidades se quedan en km/h.

$$\vec{v}_{\text{bici}} = 20\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}};\ \vec{v}_{\text{moto}} = 70\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es el ciclista, que viaja a la velocidad de la bicicleta; y que el objeto en movimiento es la motocicleta:

$$\vec{v}_{\text{sis}} = \vec{v}_{\text{bici}} = 20\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}};\ \vec{v}_{\text{obj}} = \vec{v}_{\text{moto}} = 70\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Según esto, la velocidad de la motocicleta desde el sistema de referencia del ciclista es:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{obj}} - \vec{v}_{\text{sis}} = 70\ \vec{i}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} - 20\ \vec{i}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \mathbf{50\ \vec{i}\ \frac{km}{h}}$$

40 El agua de un río fluye a 0,5 m/s. Una barcaza remonta el río navegando a 45 km/h. ¿Qué velocidad se observa para la barcaza desde la orilla? Expresa el resultado en m/s.

Antes de empezar definimos los vectores usando como referencia la dirección del río y el sentido positivo en el sentido de la corriente. La barcaza remonta el río, de ahí su signo.

$$\vec{v}_{\text{agua}} = 0{,}5\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ \vec{v}_{\text{barcaza}} = -45\ \vec{i}\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = -12{,}5\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es el agua del río, que viaja a la velocidad de la corriente. También conocemos la velocidad relativa de la barcaza:

$$\vec{v}_{\text{sis}} = \vec{v}_{\text{agua}} = 0{,}5\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{barcaza}} = -12{,}5\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Según esto, la velocidad de la barcaza desde la orilla para un observador en reposo es:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{obj}} - \vec{v}_{\text{sis}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{obj}} = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{v}_{\text{sis}} = -12{,}5\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}5\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{-12\ \vec{i}\ \frac{m}{s}}$$

El signo negativo solo indica que se mueve en el sentido contrario a la corriente.

Aceleración

41 Contesta.

a) ¿Es posible que un movimiento uniforme tenga aceleración? Pon ejemplos.

b) ¿Es posible que un cuerpo tenga velocidad cero y aceleración distinta de cero? ¿Y al contrario? Pon ejemplos en los que se dé cada situación.

a) Por supuesto que sí. Uniforme quiere decir que el módulo de la velocidad es constante (v = constante, $a_T = 0$).

Pero aunque la aceleración tangencial sea nula, la aceleración normal puede muy bien no serlo. Cualquier trayectoria rectilínea tiene $a_N = 0$. Así que cualquier trayectoria no rectilínea recorrida uniformemente tiene aceleración no nula: $a = a_N \neq 0$.

b) Sí es posible que un cuerpo tenga velocidad nula y aceleración no nula. Eso es lo que sucede en el instante en el que se inicia cualquier movimiento. La velocidad es cero, pero el ritmo de cambio de velocidad, aceleración, es distinta de cero y hará que se mueva.

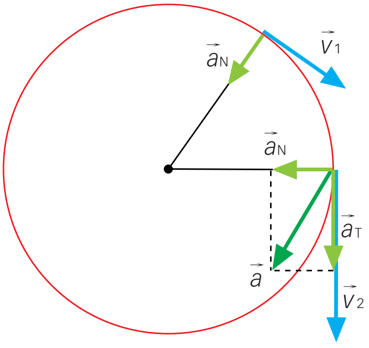
Respecto a velocidad no nula y aceleración nula, solo puede suceder en un caso, en el movimiento rectilíneo uniforme ($a_N = 0$ y $a_T = 0$).

42 ¿Qué dirección tiene la aceleración de un cuerpo que se mueve en una circunferencia con el módulo de la velocidad constante?

Está dirigida hacia el centro de la circunferencia. Como el movimiento es uniforme, $a_T = 0$; así que la aceleración es puramente normal, $\vec{a} = \vec{a}_N$.

43 Un cuerpo se mueve con movimiento circular y uniformemente acelerado. Dibuja en un punto cualquiera de la trayectoria los vectores velocidad, aceleración tangencial, aceleración normal y aceleración total.

Respuesta gráfica.

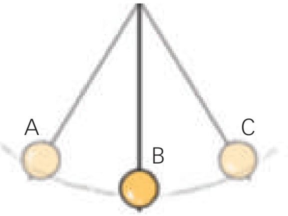


44 Un péndulo oscila en un plano vertical.

a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto medio del recorrido (B)?

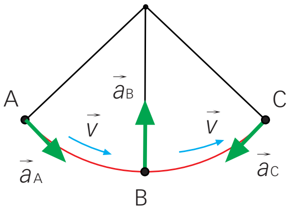
b) ¿Y en los extremos?

(Recuerda que $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$ y piensa que al soltar la masa en un extremo, desde el reposo, va cada vez más deprisa hasta el punto más bajo y luego se frena hasta pararse en el otro extremo).



Convendrá analizar cualitativamente el movimiento del péndulo desde que lo soltamos, por ejemplo, en A hasta que se para en el punto C.

a) Desde A hacia B el péndulo se mueve cada vez más deprisa, siendo B el punto más rápido; y de B a C frena, de modo que su aceleración tangencial tiene que cambiar de sentido en B, es decir, $a_{TB} = 0$. Pero en B sí hay aceleración normal, pues el movimiento es circular y $v_B \neq 0$. Esto quiere decir que $\vec{a}_B = \vec{a}_{NB}$, dirigida hacia el centro de la trayectoria.



b) Al principio $v_A = 0$. Está parado, de modo que $a_{NA} = 0$ (no puede tener aceleración normal si no se está moviendo). Sí tiene aceleración tangencial y está dirigida hacia B, pues en tal sentido va a aumentar el vector velocidad.

En el punto C, de nuevo $v_C = 0$, lo que obliga a que $a_{NC} = 0$ y solo hay aceleración tangencial.

45 Se toma una curva como la de la figura, cuyos tramos AB y DE son rectos. Hasta el punto C la velocidad es constante y empieza a acelerar a partir de ahí.

Dibuja en tu cuaderno los vectores $\Delta\vec{v}$ apropiados en cada tramo.

Pista: ¿qué tipos de aceleración hay en cada tramo?

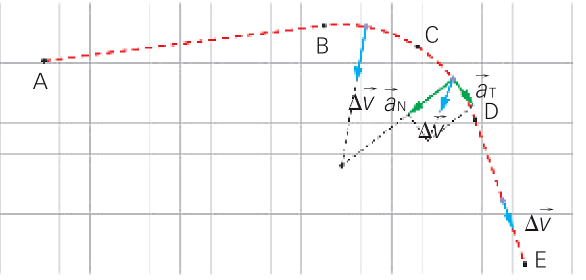
Por definición de vector aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La dirección del vector pedido, $\Delta\vec{v}$, es la dirección del vector aceleración en cada tramo.

- El tramo AB es un movimiento rectilíneo y uniforme. Así que aceleración no hay, $\Delta\vec{v} = 0$.

- El tramo BC es un movimiento circular y uniforme. Así que solo hay aceleración normal, $\Delta\vec{v}$ en la dirección del radio.
- El tramo CD es un movimiento circular uniformemente acelerado. Así que hay aceleración normal y tangencial, $\Delta\vec{v}$ en la dirección del vector $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$.
- El tramo DE es un MRUA. Así que no hay aceleración normal y solo hay tangencial, $\Delta\vec{v}$ en la dirección del vector $\vec{a}_T$.



46 **¿Es posible que la velocidad de un cuerpo sea constante y su aceleración no sea nula?**

Normalmente llamamos «velocidad» al escalar, es decir, al módulo del vector velocidad. Entonces, si el módulo de la velocidad es constante, $v = |\vec{v}| =$ cte., tenemos un movimiento uniforme, y por tanto, la aceleración tangencial sería nula, $\vec{a}_T = 0$. Pero podría ocurrir que la aceleración normal sea distinta de cero, $|\vec{a}_T| =$ cte. $\neq 0$. En este caso sería un movimiento circular y uniforme.

Si es el vector velocidad el que es constante, $\vec{v} =$ cte. (módulo, dirección y sentido constante), el movimiento solo podría ser rectilíneo y uniforme, por lo que la aceleración sería nula.

47 **¿Cómo tiene que ser el vector velocidad para cambiar el sentido en el que se recorre una trayectoria?**
Pista: ten en cuenta la relación entre los vectores aceleración tangencial y velocidad.

Los sentidos de $\vec{v}$ y $\vec{a}_T$ deben ser opuestos (por definición siempre tienen la misma dirección, son paralelos).

La $\vec{a}_T$ indica cómo cambia el módulo de $\vec{v}$:

- Si $\vec{a}_T$ apunta en el mismo sentido que $\vec{v}$, el módulo de la velocidad aumenta.
- Si $\vec{a}_T$ apunta en sentido contrario a $\vec{v}$, el módulo de la velocidad disminuye.

Fijémonos en el cociente $a_T = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

En el sentido del movimiento, si $a_T < 0$, entonces la velocidad decrece, $\Delta v < 0$ (para $\Delta t > 0$).

Por tanto, para que el sentido del movimiento cambie, $\vec{v}$ y $\vec{a}_T$ deben tener sentidos opuestos. En tal caso, $\vec{v}$ se irá haciendo más pequeño (la velocidad disminuye) hasta hacerse 0 y cambiar de sentido.

48 **¿Puede moverse un cuerpo hacia la izquierda cuando su aceleración se dirige hacia la derecha?**

Sí. Tomemos el caso más sencillo, un movimiento rectilíneo. El hecho de que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tengan sentidos opuestos solo significa que el movimiento es decelerado (se frena).

Nota: si el movimiento continúa así, $\vec{v}$ se hará 0 y habrá un cambio de sentido en la trayectoria. En ese momento, $\vec{v}$ y $\vec{a}_T$ tendrán el mismo sentido.

49 ¿Es cierto que conocer la aceleración normal de un objeto proporciona información sobre la forma de la trayectoria que sigue? ¿Y la tangencial?

Ambas aceleraciones dan información sobre la forma de la trayectoria.
Teniendo en cuenta que cualquier trayectoria puede aproximarse con toda la precisión necesaria por segmentos de recta (la suma de todos los desplazamientos, $\Delta\vec{r}$ (para Δt muy pequeños), tiende a coincidir con la trayectoria real.

- Si conocemos $\vec{a}_T$, que es tangente a la trayectoria, tenemos en cada punto un trocito de la recta que se aproxima a la trayectoria real.
- Si conocemos $\vec{a}_N$, que es perpendicular a la trayectoria, parece no decirnos nada directamente, pero, si conocemos la aceleración normal, su dirección perpendicular es la tangencial y estaríamos en el caso anterior.

Así que tanto la aceleración tangencial como la aceleración normal nos dan información sobre la dirección del movimiento en cada punto de la trayectoria.

50 ¿Cómo es un movimiento en el que solo hay aceleración tangencial? Pista: en este caso, $\vec{v}$, que es un vector, solo cambia en módulo, no en dirección.
¿Qué características de este vector permanecen constantes?

Si la aceleración normal es nula ($a_N = 0$), el movimiento es rectilíneo. Como hay aceleración, será un movimiento acelerado o frenado.

El vector velocidad tiene dirección constante.

51 Calcula la aceleración tangencial media de un vehículo que circula a 72 km/h y se detiene en 4 s.

Pasamos a unidades del sistema internacional:

$$72\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 20\ \text{m/s}$$

Calculamos la aceleración tangencial media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\text{final}} - v_{\text{inicial}}}{\Delta t} = \frac{0\ \text{m/s} - 20\ \text{m/s}}{4\ \text{s}} = \mathbf{-5\ \frac{m}{s^2}}$$

52 Un tren viaja a 120 km/h y se detiene en 29 s.

a) ¿Cuál es su aceleración tangencial media?

b) ¿Cuánto tardará en alcanzar esa misma velocidad máxima si al arrancar desde el reposo mantiene una aceleración tangencial constante de 0,7 m/s²?

Pasamos a unidades del sistema internacional:

$$120\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 33,\hat{3}\ \text{m/s}$$

a) Calculamos la aceleración tangencial media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\text{final}} - v_{\text{inicial}}}{\Delta t} = \frac{0\ \text{m/s} - 33,\hat{3}\ \text{m/s}}{29\ \text{s}} = \mathbf{-1,15\ \frac{m}{s^2}}$$

b) De la definición de la aceleración tangencial media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}$$

Para $t_{inicial} = 0$, despejando t_{final} y sustituyendo:

$$t_{final} = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{a_m} = \frac{33,\hat{3}\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s}}{0,7\ \text{m/s}^2} = \mathbf{47,62\ s}$$

53 La lanzadera espacial alcanza en el despegue una aceleración de hasta $3 \cdot g$ (tres veces el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre). ¿Cuánto tiempo tardaría en alcanzar, a ese ritmo, la velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s? (Sin tener en cuenta efectos relativistas). Dato: $g = 9,8$ m/s^2.

Suponiendo que su movimiento sea uniformemente acelerado, $\vec{a} = \text{cte}$.

Si la física clásica fuera válida para velocidades comparables con la de la luz (que no lo es) y se pudiera mantener la aceleración constante $a_T = 3 \cdot g \approx 29,4$ m/s^2 el tiempo suficiente, la velocidad de la luz en el vacío, c, se alcanzaría en un tiempo t_c tal que:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 3 \cdot g = \frac{c}{t_c} \Rightarrow t_c = \frac{c}{3 \cdot g} = \frac{3,0 \cdot 0^8\ \text{m/s}}{3 \cdot 9,8\ \text{m/s}^2} = 1,02 \cdot 10^7\ \text{s}$$

$$t_c = 1,02 \cdot 10^7\ \cancel{\text{s}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\ \text{día}}{24\ \cancel{\text{h}}} \approx \mathbf{118\ días}$$

54 Calcula la aceleración normal debida a la rotación en un punto del ecuador terrestre.

Pasamos el periodo a unidades del sistema internacional:

$$t_c = 23\cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{h}}} + 56\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60}{1\ \cancel{\text{min}}} + 4\ \text{s} = 86164\ \text{s}$$

La aceleración normal coincide con la aceleración centrípeta:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi \cdot R_{ec}}{T_s}\right)^2}{R_{ec}} = \frac{4\pi^2 \cdot R_{ec}}{T_s^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6\ \text{m}}{(86\,164\ \text{s})^2} = \mathbf{0,0339\ m/s^2}$$

55 Las normas que regulan la deceleración que debe sufrir un coche para que salten los airbags han pasado desde valores próximos a los $25 \cdot g$ (25 veces el valor de la aceleración de la gravedad) hasta los $60 \cdot g$ que hacen falta hoy día.

a) ¿A qué velocidad inicial hay que ir para alcanzar esa nueva aceleración (negativa) cuando un coche choca y se detiene bruscamente en 0,1 s?

b) ¿Cuál es, entonces, la aceleración mínima a la que salta el airbag?

a) Si suponemos que la aceleración es constante, $\vec{a} = \text{cte.} = -60 \cdot g\,\vec{i}$. En nuestro caso es de frenado desde $t_{ini} = 0$ hasta que $v_{fin} = 0$.

Usando la definición de aceleración media y despejando la velocidad pedida:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{final} - \vec{v}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{\vec{0} - \vec{v}_{inicial}}{t_{final} - 0} \Rightarrow \vec{v}_{inicial} = -\vec{a}_m \cdot t_{final}$$

$$\vec{v}_{inicial} = -(-60 \cdot g\,\vec{i}) \cdot t_{final} = 60 \cdot 9,8\ \text{m/s}^2\,\vec{i} \cdot 0,1\ \text{s} = 58,8\,\vec{i}\ \text{m/s} \approx \mathbf{212\,\vec{i}\ \ km/h}$$

b) Si suponemos que la aceleración es constante:

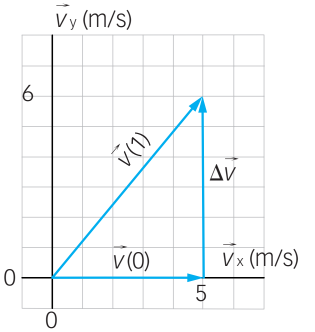
$$\vec{a} = -60 \cdot g\,\vec{i} = -60 \cdot 9{,}8\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{-588\,\vec{i}\,\frac{m}{s^2}}$$

56 Para un cierto movimiento en el plano:

$$\vec{v}\,(t) = 5\,\vec{i} + 6 \cdot t\,\vec{j}\ \text{m/s}$$

a) Representa gráficamente los vectores velocidad en $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$ s, así como el vector variación de velocidad $\Delta\vec{v}$. ¿Es paralelo o perpendicular a la velocidad inicial?

b) Calcula el vector aceleración media en ese intervalo de tiempo y di cuánto vale su módulo.



a) Para la representación gráfica es necesario calcular previamente el valor del vector velocidad en los instantes pedidos:

$$\vec{v}\,(t = 0\text{ s}) = (5\,\vec{i} + 6 \cdot 0\,\vec{j})\text{ m/s} = 5\,\vec{i}\text{ m/s}$$

$$\vec{v}\,(t = 1\text{ s}) = (5\,\vec{i} + 6 \cdot 1\,\vec{j})\text{ m/s} = (5\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\text{ m/s}$$

Y el vector variación de velocidad es la diferencia entre estos dos últimos:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}\,(t = 1\text{ s}) - \vec{v}\,(t = 0\text{ s}) = [(5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}) - 5\,\vec{i}]\text{ m/s} = 6\,\vec{j}\text{ m/s}$$

El vector variación de la velocidad, en este caso, es **perpendicular** a la velocidad inicial.

b) La aceleración media en ese intervalo será: $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{6\,\vec{j}\text{ m/s}}{1\text{ s}} = \mathbf{6\,\vec{j}\ m/s^2}$.
Y el módulo es $|\vec{a}_m| = \mathbf{6\ \ m/s^2}$.

57 Los fabricantes de una montaña rusa que tiene un tramo en el que podemos viajar cabeza abajo (ver figura) nos aseguran que en dicho tramo la aceleración normal vale $2 \cdot g$, es decir, $a_N \approx 2 \cdot 9{,}8$ m/s^2.

a) Si en ese punto se mide para los carritos una velocidad de 50 km/h, ¿cuánto vale el radio de la curva?

b) Dibuja en tu cuaderno el vector $\vec{a}_N$.

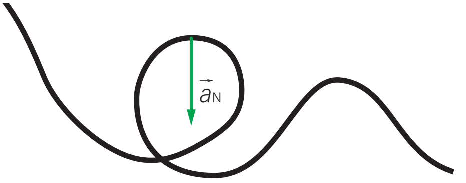
Pasamos a unidades del sistema internacional:

$$50\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} = 13{,}\hat{8}\text{ m/s}$$

a) Despejando de la definición de la aceleración normal:

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{(13{,}\hat{8}\text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2} = \mathbf{9{,}84\ m}$$

b) Nota: $\vec{a}_N$ es perpendicular a la tangente a la trayectoria.



58 En un ascensor una de las lámparas del techo está a punto de descolgarse. El ascensor comienza a subir y arranca el movimiento con una aceleración hacia arriba de 1 m/s^2. En ese momento la lámpara se descuelga y cae por efecto de la gravedad con una aceleración descendente de 9,8 m/s^2. Para un observador en el interior del ascensor, ¿con qué aceleración cae la lámpara?

Antes de empezar definimos los vectores usando como referencia la dirección vertical por la que se mueven ascensor y lámpara. El sentido es positivo hacia arriba.

$$\vec{a}_{\text{ascensor}} = +\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\ \vec{a}_{\text{lámpara}} = -\,9{,}8\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es el ascensor, que sube con su aceleración. Y que el objeto con aceleración es la lámpara, que cae:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{ascensor}} = +\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{lámpara}} = -\,9{,}8\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Según esto, la aceleración de la lámpara para un observador acelerado en el interior del ascensor es:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(-\,9{,}8\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(+\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -\,\mathbf{10{,}8}\,\vec{\mathbf{j}}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

El signo negativo solo indica que el sentido del movimiento es hacia abajo para el observador en el ascensor.

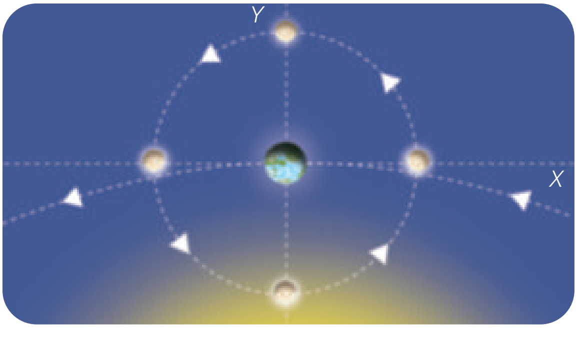
59 Teniendo en cuenta el resultado de la actividad 54, calcula, para un observador en el ecuador terrestre, la aceleración de la Luna en cada una de las siguientes posiciones. No debes considerar la traslación terrestre.

a) Luna llena.

b) Cuarto menguante.

c) Luna nueva.

d) Cuarto creciente.



Nota: el sistema de referencia está centrado en la Tierra con el eje OX en dirección tangente a la órbita terrestre y el eje OY negativo en dirección al Sol. La rotación terrestre y la traslación lunar son giros en sentido antihorario.

Datos: radio de la órbita lunar, $r_L = 3{,}84 \cdot 10^8$ m; periodo lunar, $T_L = 27$ d 7 h 43 min 11 s.

En el sistema de referencia (Tierra) tiene, al menos, dos aceleraciones centrípetas:

- La aceleración normal debida a la rotación ya está calculada en el ejercicio 54.
  La dirección y el sentido según el sistema de referencias proporcionado, situado el observador a media noche:

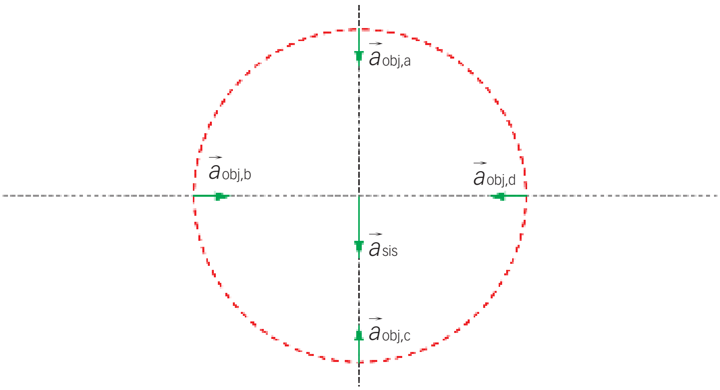
$$\vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- La aceleración normal debida al movimiento de traslación de la Tierra a lo largo de su órbita no la tenemos en cuenta para este ejercicio.

La Luna en su órbita, supuesta circular, está sometida a una aceleración centrípeta que podemos calcular una vez conocido el periodo:

$$T_{\text{Luna}} = 27\,\cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\,\cancel{\text{h}}}{1\,\cancel{\text{días}}} \cdot \frac{3600\,\text{s}}{1\,\cancel{\text{h}}} + 7\,\cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\,\text{s}}{1\,\cancel{\text{h}}} + 43\,\cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\,\text{s}}{1\,\cancel{\text{min}}} + 11\,\text{s} = 2\,360\,591\,\text{s}$$

$$a_{\text{Luna}} = \frac{v^2}{r_{\text{L}}} = \frac{\left(\dfrac{2\pi \cdot r_{\text{L}}}{T_{\text{L}}}\right)^2}{r_{\text{L}}} = \frac{4\pi^2 \cdot r_{\text{L}}}{T_{\text{L}}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\,\text{m}}{(2\,360\,591\,\text{s})^2} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\text{m/s}^2$$



a) Luna llena. En la posición que ocupa la Luna según el sistema de referencia que hemos definido, el vector aceleración normal para la Luna es:

$$\vec{a}_{\text{Luna llena}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\,\text{m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna llena}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\,\text{m/s}^2$$

En el ecuador de la Tierra a medianoche se observa la Luna llena con una aceleración:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(-2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 10^{-2}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{0{,}0312}\,\vec{\mathbf{j}}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

b) Cuarto menguante. En la posición que ocupa la Luna su vector aceleración normal es:

$$\vec{a}_{\text{Luna menguante}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\,\text{m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna menguante}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

Según esto, la aceleración de la luna menguante para un observador sobre el ecuador de la Tierra a media noche es:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 10^{-2}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{\left(0{,}0027\,\vec{i} + 0{,}0339\,\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}}$$

c) Luna nueva. En la posición que ocupa la Luna según el sistema de referencia que hemos definido, el vector aceleración normal para la Luna es:

$$\vec{a}_{\text{Luna nueva}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna nueva}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

Según esto, la aceleración de la Luna nueva para un observador sobre el ecuador de la Tierra a media noche es:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 10^{-2}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{0{,}0366\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}}$$

d) Cuarto creciente. En la posición que ocupa la Luna según el sistema de referencia que hemos definido, el vector aceleración normal para la Luna es:

$$\vec{a}_{\text{Luna, creciente}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna, menguante}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

Según esto, la aceleración de la luna menguante para un observador sobre el ecuador de la Tierra a media noche es:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(-2{,}72 \cdot 110^{-3}\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 110^{-2}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \mathbf{\left(-0{,}0027\,\vec{i} + 0{,}0339\,\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}}$$

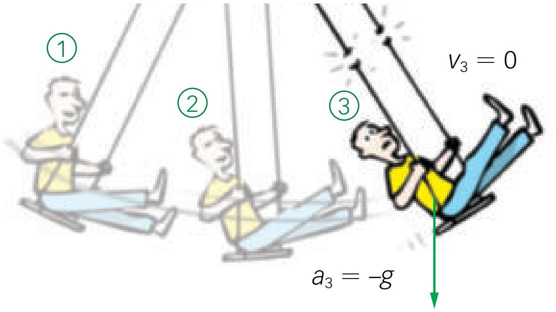
60 La cuerda de un columpio se rompe cuando está en uno de los extremos de su trayectoria (por ejemplo, en 3).

a) ¿Hacia dónde sale volando el muchacho? Justifica gráficamente la respuesta.

b) Y, antes de haberse roto, ¿había aceleración tangencial en los extremos del movimiento? Justifica la respuesta y dibuja en tu cuaderno las dos componentes de la aceleración –cuando existan– en los tres puntos de la figura.

a) ¿Qué velocidad tiene en el extremo (3) de la trayectoria? $v_3 = 0$, ¡ahí está parado!

Si se rompe la cuerda, no se va a quedar quieto porque sí hay aceleración, la aceleración de la gravedad. Al actuar sobre el muchacho, cuando ya no está ligado al columpio, hace que caiga verticalmente.

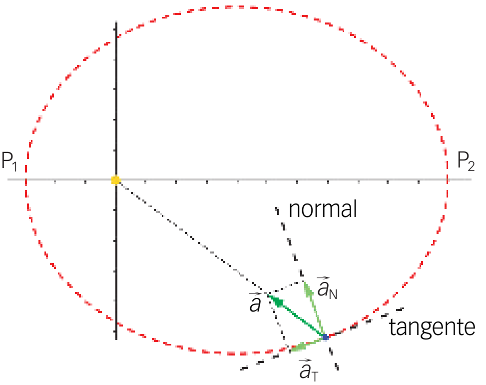


b) Es la misma solución que en la actividad 44.

61 **¿Qué tipo de aceleración tiene un planeta (en un sistema de referencia anclado al Sol) sabiendo que su órbita es elíptica con el Sol en el foco y que el vector aceleración del planeta siempre apunta hacia el Sol? ¿Es posible que recorra esa órbita a velocidad constante?**

Si $\vec{a}$ apunta hacia el Sol en general, $\vec{a}$ tiene dos componentes intrínsecas, la aceleración normal, $\vec{a}_N$, y la aceleración tangencial, $\vec{a}_T$. Por eso $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$.

Por tanto, como en general $\vec{a}_T \neq 0$, un planeta describiendo una elipse bajo la acción de la atracción gravitatoria del Sol no puede recorrer la órbita a velocidad constante. Y así sucede en la realidad: la velocidad varía desde un valor máximo en el punto más cercano, P_1, hasta otro mínimo en el punto más alejado, P_2.



Nota: si la órbita fuera circular, sí podría llevar una velocidad constante, en módulo, ya que la aceleración sería puramente radial y $\vec{a}_T = 0$.

62 **Se lanza una bola por el aire y registramos su posición en tres instantes con los siguientes resultados:**

t (s)	Posición (m)
0,0	$0\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$
1,0	$22,3\,\vec{i} + 26,1\,\vec{j}$
2,0	$40,1\,\vec{i} + 38,1\,\vec{j}$

a) ¿Se puede decir algo sobre la forma de la trayectoria?

b) Intenta predecir matemáticamente la posición en $t = 2$ s a partir de las posiciones en los dos instantes anteriores.

c) ¿Coincide tu predicción con el dato? ¿Por qué?

a) No, en general de tres puntos no puede deducirse la forma de una trayectoria. Hay infinitas trayectorias distintas que pasan por tres puntos.

b) Para predecir posiciones futuras tenemos que saber qué tipo de movimiento sigue. Como no hay ninguna pista, haremos la suposición más sencilla, que se trata de un movimiento a velocidad constante.

Por tanto, el vector velocidad media, o simplemente el vector velocidad, ya que estamos suponiendo la velocidad constante para variación pequeña de tiempo, es:

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{\text{final}} - \vec{r}_{\text{inicial}}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}\,(1\text{ s}) - \vec{r}\,(0\text{ s})}{1\text{ s} - 0\text{ s}}$$

Sustituimos:

$$\vec{v} = \frac{(22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j})\text{ m} - (0\,\vec{i} + 0\,\vec{j})\text{ m}}{1\text{ s}} = 22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}\text{ m/s}$$

Calculamos ahora la posición para $t = 2$ s. Según la definición de velocidad:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}\,(2\text{ s}) - \vec{r}\,(1\text{ s})}{\Delta t} \Rightarrow \vec{r}\,(2\text{ s}) = \vec{r}\,(1\text{ s}) + \vec{v} \cdot \Delta t$$

Sustituimos:

$$\vec{r}\,(2\text{ s}) = (22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}\text{ m}) + \left(22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}\text{ m/s}\right) \cdot 1\text{ s} = \mathbf{44{,}6\,\vec{i} + 52{,}2\,\vec{j}\text{ m}}$$

c) No coincide el valor que hemos obtenido con el valor real que aparece tabulado. Esto significa que, contra nuestra suposición, la velocidad del movimiento no es constante.

63 Benito hace cada día un viaje de ida y vuelta al puesto de periódicos, que dista 3 km de su casa. Viaja a la velocidad constante de 6 km/h y emplea una hora en total. Un día solo consigue hacer 4 km/h en el viaje de ida y piensa que podrá arreglarlo y compensar el retraso volviendo a una velocidad de 8 km/h, pero Alicia le dice que no. ¿Cuánto tarda en realidad? ¿Cuál es la velocidad media aquel día?

Como la velocidad no es la misma en el trayecto de ida y de vuelta, calculamos el tiempo por tramos:

$$\text{Ida: } v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t_{\text{ida}} = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{3\,\cancel{\text{km}}}{4\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}}} = 0{,}75\,\cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\text{ min}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 45\text{ min}$$

$$\text{Vuelta: } v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t_{\text{vuelta}} = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{3\,\cancel{\text{km}}}{8\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}}} = 0{,}375\,\cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\text{ min}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 22{,}5\text{ min}$$

$$\Delta t_{\text{vuelta}} = 22\text{ min} + 0{,}5\,\cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\text{ s}}{1\,\cancel{\text{min}}} = 22\text{ min } 30\text{ s}$$

Por tanto, el tiempo total que empleó ese día en hacer su recorrido fue:

$$\Delta t = \Delta t_{\text{ida}} + \Delta t_{\text{vuelta}} = 45\text{ min} + 22\text{ min} + 30\text{ s} = 67\text{ min} + 30\text{ s} = 1\text{ h} + 7\text{ min} + 30\text{ s}$$

Calculamos la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6\text{ km}}{0{,}75\text{ h} + 0{,}375\text{ h}} = \mathbf{5{,}\hat{3}\text{ km/h}}$$

64 Supón que la posición de un objeto en función del tiempo es $\vec{r}(t) = (-7 + 5\,t)\,\vec{i} + 8\,t^2\,\vec{j} + (6\,t - 4\,t^3)\,\vec{k}$ en unidades del SI.

a) ¿Cuánto vale la velocidad instantánea en $t = 0$ s?

b) ¿Cuánto vale la aceleración instantánea en $t = 0$ s?

a) Para calcular la velocidad en el instante $t = 0$ s, partimos de la definición de velocidad instantánea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Sustituimos:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(-7 + 5\cdot(t + \Delta t)\right)\vec{i} + \left(8\cdot(t + \Delta t)^2\right)\vec{j} + \left(6\cdot(t + \Delta t) - 4\cdot(t + \Delta t)^3\right)\vec{k}}{\Delta t} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-7 + 5\cdot t)\,\vec{i} + (8\cdot t^2)\,\vec{j} + (6\cdot t - 4\cdot t^3)\,\vec{k}}{\Delta t}\right]$$

Desarrollamos los binomios:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{(-7 + 5\cdot t + 5\cdot \Delta t)\,\vec{i} + \left(8\cdot t^2 + 16\cdot t\cdot \Delta t + 8\cdot(\Delta t)^2\right)\vec{j}}{\Delta t} + \right.$$

$$\frac{\left(6\cdot t + 6\cdot \Delta t - 4\cdot t^3 - 12\cdot t^2\cdot \Delta t - 12\cdot t\cdot(\Delta t)^2 - 4\cdot(\Delta t)^3\right)\vec{k}}{\Delta t}$$

$$\left. - \frac{(-7 + 5\cdot t)\,\vec{i} + (8\cdot t^2)\,\vec{j} + (6\cdot t - 4\cdot t^3)\,\vec{k}}{\Delta t}\right]$$

Efectuando las restas componente a componente:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{5\cdot \Delta t\,\vec{i} + \left[16\cdot t\cdot \Delta t + 8\cdot(\Delta t)^2\right]\vec{j} + \left[6\cdot \Delta t - 12\cdot t^2\cdot \Delta t - 12\cdot t\cdot(\Delta t)^2 - 4\cdot(\Delta t)^3\right]\vec{k}}{\Delta t}$$

Extrayendo en el numerador factor común Δt:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left\{5\,\vec{i} + \left[16\cdot t + 8\cdot \Delta t\right]\vec{j} + \left[6 - 12\cdot t^2 - 12\cdot t\cdot \Delta t - 4\cdot(\Delta t)^2\right]\vec{k}\right\}\cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

Simplificando:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{5\,\vec{i} + \left[16t + 8\Delta t\right]\vec{j} + \left[6 - 12t^2 - 12t\cdot \Delta t - 4(\Delta t)^2\right]\vec{k}\right\}$$

Resolvemos el límite:

$$\vec{v}(t) = 5\,\vec{i} + \left[16\cdot t + 8\cdot 0\right]\vec{j} + \left[6 - 12\cdot t^2 - 12\cdot t\cdot 0 - 4\cdot(0)^2\right]\vec{k} =$$

$$= 5\,\vec{i} + 16\cdot t\,\vec{j} + (6 - 12\cdot t^2)\,\vec{k}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dando valor a la variable tiempo, $t = 0$ s:

$$\vec{v}(0\text{ s}) = 5\,\vec{i} + 16\cdot(0\text{ s})\,\vec{j} + \left(6 - 12\cdot(0\text{ s})^2\right)\vec{k} = \mathbf{5\,\vec{i} + 6\,\vec{k}\,\frac{m}{s}}$$

b) Partimos del vector velocidad conseguido al resolver el límite anterior:

$$\vec{v}(t) = 5\,\vec{i} + 16t\,\vec{j} + (6 - 12t^2)\,\vec{k}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Queremos calcular la aceleración en el instante $t = 0$ s. Partimos de la definición de aceleración instantánea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Sustituimos:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[5\,\vec{i} + 16 \cdot (t + \Delta t)\,\vec{j} + \left(6 - 12 \cdot (t + \Delta t)^2\right)\vec{k}\right] - \left[5\,\vec{i} + 16 \cdot t\,\vec{j} + (6 - 12 \cdot t^2)\,\vec{k}\right]}{\Delta t}$$

Desarrollamos los binomios:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{5\,\vec{i} + (16 \cdot t + 16 \cdot \Delta t)\,\vec{j} + \left(6 - 12 \cdot t^2 - 24 \cdot t \cdot \Delta t - 12 \cdot (\Delta t)^2\right)\vec{k}}{\Delta t} - \frac{5\,\vec{i} + 16 \cdot t\,\vec{j} + (6 - 12 \cdot t^2)\,\vec{k}}{\Delta t}\right]$$

Efectuando las restas componente a componente y extrayendo en el numerador el factor común Δt:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[16 \cdot \Delta t\,\vec{j} + \left(-24 \cdot t \cdot \Delta t - 12 \cdot (\Delta t)^2\right)\vec{k}\right]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[16\,\vec{j} - (24 \cdot t + 12 \cdot \Delta t)\,\vec{k}\right] \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

Simplificando y resolviendo el límite:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[16\,\vec{j} - (24 \cdot t + 12 \cdot \Delta t)\,\vec{k}\right] = 16\,\vec{j} - (24 \cdot t + 12 \cdot 0)\,\vec{k} = 16\,\vec{j} - 24 \cdot t\,\vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dando valor a la variable tiempo, $t = 0$ s:

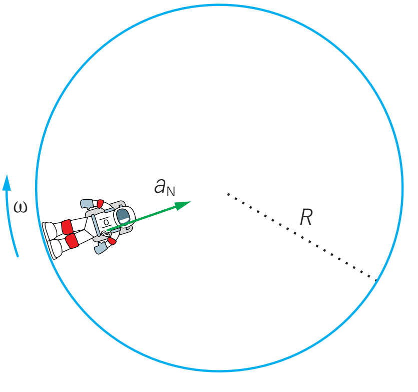
$$\vec{a}(0\text{ s}) = 16\,\vec{j} - 24 \cdot (0\text{ s})\,\vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{16\,\vec{j}\ \frac{m}{s^2}}$$

65 **En las películas de ciencia ficción, una de las formas menos fantásticas de crear «gravedad artificial» utiliza rotación uniforme alrededor de un eje dentro de una estación espacial.**

a) Dibuja en una circunferencia la posición de una astronauta apoyada en el «suelo», representa la aceleración a la que está sometida y di de qué tipo es.

b) ¿A qué velocidad angular debe girar una estación espacial de 1 km de radio para que la aceleración sea numéricamente como la de la gravedad en la superficie de la Tierra? ¿Y si el radio es de 100 m?

a) En un movimiento circular uniforme la aceleración es puramente normal ($\vec{a} = \vec{a}_N$; $\vec{a}_T = \vec{0}$).



b) Queremos que $a = a_N = g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ (trabajamos sin carácter vectorial porque la aceleración solo tiene componte normal). La aceleración normal coincide con la aceleración centrípeta:

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

Por tanto, queremos que: $v = \sqrt{g \cdot R}$.

Como $v = \omega \cdot R$, sustituimos en la expresión anterior y despejamos la velocidad angular:

$$\omega \cdot R = \sqrt{g \cdot R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Es decir, para que la aceleración experimentada sea igual a la aceleración de la gravedad, las velocidades lineal y angular deben ser:

- Para $R = 1\ \text{km} = 1000\ \text{m}$, sustituyendo y operando:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{1000\ \text{m}}} = \mathbf{0{,}099\ rad/s}\ (\backsimeq 1\,\text{rpm})$$

- Para $R = 100\ \text{m}$, sustituyendo y operando:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{100\ \text{m}}} = \mathbf{0{,}31\ rad/s}\ (\backsimeq 3\,\text{rpm})$$

66 Situando el origen del sistema de referencia en el Sol, las componentes del vector de posición del planeta Tierra cada 30 días vienen dadas por la siguiente tabla:

Fecha	r_x (10^{10} m)	r_y (10^{10} m)
4 de julio	15,2	0,0
3 de agosto	13,3	7,3
2 de septiembre	8,2	12,7
2 de octubre	0,9	14,9
1 de noviembre	−6,6	13,3

a) Representa en tu cuaderno los cinco vectores de posición del movimiento del planeta Tierra en cada fecha.

b) Representa en tu cuaderno la trayectoria del planeta según indican los vectores de posición.

c) Representa en tu cuaderno los cuatro vectores desplazamiento consecutivos que se pueden trazar.

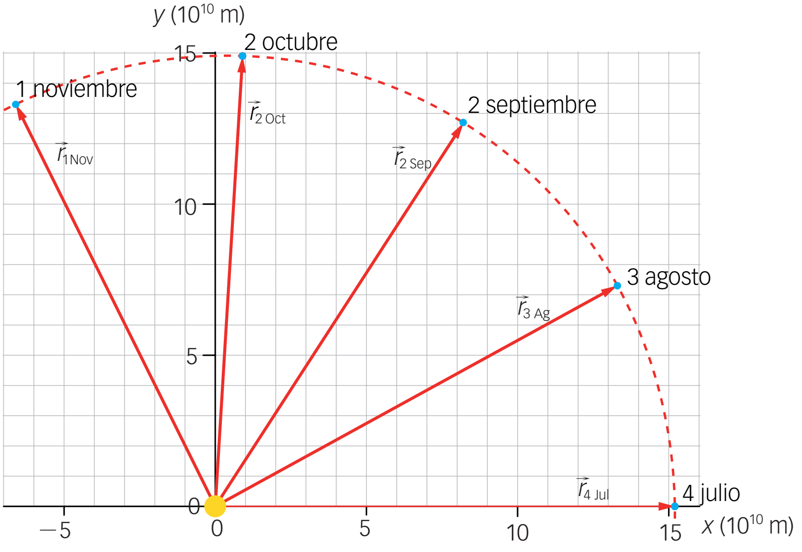
d) Calcula las componentes de cuatro vectores velocidad media en unidades del SI. Escribe el resultado en una tabla similar a la anterior y asigna a cada vector la fecha intermedia de cada intervalo.

e) Representa en tu cuaderno los vectores velocidad media del movimiento del planeta Tierra. Considera la posición de la Tierra en la fecha de $\vec{v}$.

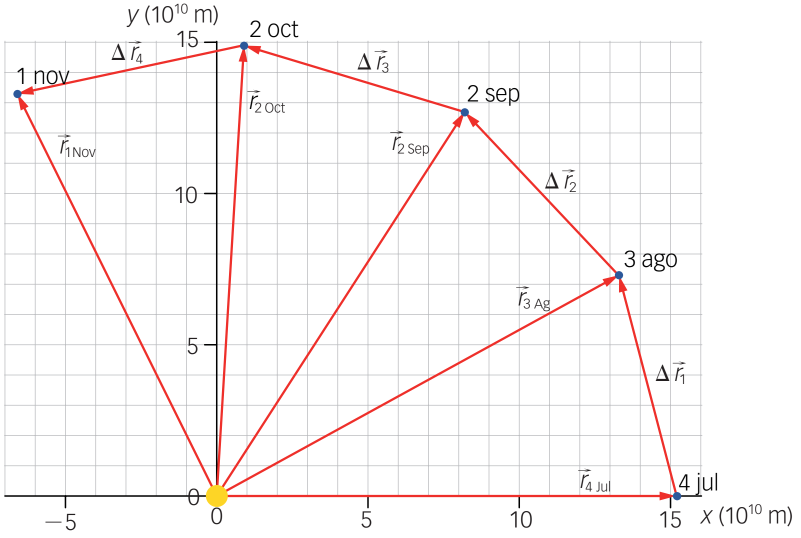
f) Calcula las componentes de tres vectores aceleración media en cm/s². Escribe el resultado en una tabla similar a la anterior.

g) Representa en tu cuaderno los vectores aceleración media. Considera la posición de la Tierra en la fecha de $\vec{a}$. ¿Adónde apuntan estos vectores?

a y b)



c)



d) Pasamos los 30 días a unidades del sistema internacional:

$$30\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 2592000\ \text{s}$$

Para calcular la fecha intermedia hay que tener en cuenta que los datos de la tabla están separados 30 días. Calculamos el vector velocidad media para cada tramo:

$$\vec{v}_{19\,\text{Jul}} = \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{3\,\text{Ag}} - \vec{r}_{4\,\text{Jul}}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(13{,}3\ \vec{i} + 7{,}3\ \vec{j}\right) - \left(15{,}2\ \vec{i}\right)\right] \cdot 10^{10}\ \text{m}}{2592000\ \text{s}}$$

$$\vec{v}_{19\,\text{Jul}} = \mathbf{-7330\ \vec{i} + 28164\ \vec{j}\ m/s}$$

$$\vec{v}_{18\,\text{Ag}} = \frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{2\,\text{Sep}} - \vec{r}_{3\,\text{Ag}}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(8{,}2\ \vec{i} + 12{,}7\ \vec{j}\right) - \left(13{,}3\ \vec{i} + 7{,}3\ \vec{j}\right)\right] \cdot 10^{10}\ \text{m}}{2592000\ \text{s}}$$

$$\vec{v}_{18\,\text{Ag}} = \mathbf{-19676\ \vec{i} + 20833\ \vec{j}\ m/s}$$

Continuamos con los dos tramos siguientes:

$$\vec{v}_{17\,\text{Sep}} = \frac{\Delta \vec{r}_3}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{2\,\text{Oct}} - \vec{r}_{2\,\text{Sep}}}{30 \text{ día}} = \frac{\left[\left(0{,}9\,\vec{i} + 14{,}9\,\vec{j}\right) - \left(8{,}2\,\vec{i} + 12{,}7\,\vec{j}\right)\right] \cdot 10^{10} \text{ m}}{2592000 \text{ s}}$$

$$\vec{v}_{17\,\text{Sep}} = \mathbf{-28164\,\vec{i} + 8488\,\vec{j}\ m/s}$$

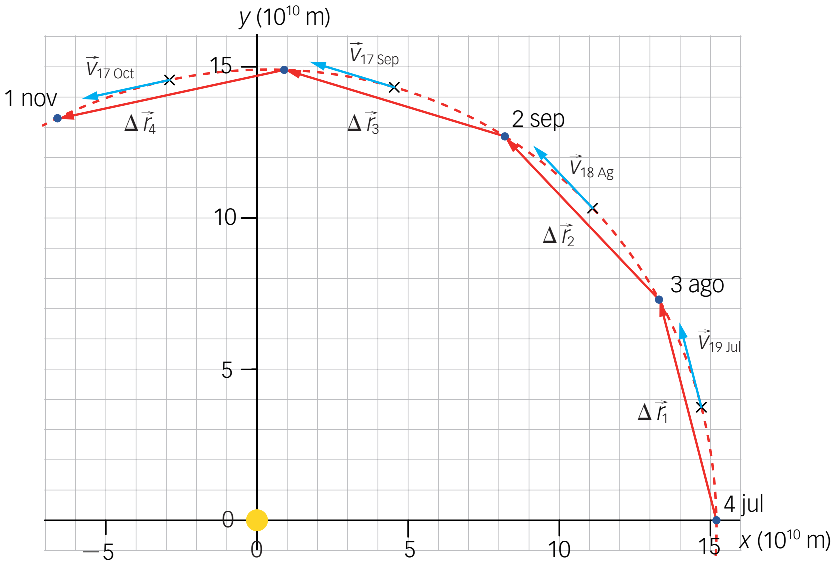
$$\vec{v}_{17\,\text{Oct}} = \frac{\Delta \vec{r}_4}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{1\text{Nov}} - \vec{r}_{2\,\text{Oct}}}{30 \text{ día}} = \frac{\left[\left(-6{,}6\,\vec{i} + 13{,}3\,\vec{j}\right) - \left(0{,}9\,\vec{i} + 14{,}9\,\vec{j}\right)\right] \cdot 10^{10} \text{ m}}{2592000 \text{ s}}$$

$$\vec{v}_{17\,\text{Oct}} = \mathbf{-28935\,\vec{i} - 6173\,\vec{j}\ m/s}$$

Fecha	r_x (10^{10} m)	r_y (10^{10} m)
4 julio	15,2	0,0
3 agosto	13,3	7,3
2 septiembre	8,2	12,7
2 octubre	0,9	14,9
1 noviembre	−6,6	13,3

Fecha	v_x (m/s)	v_y (m/s)
19 julio	**−7330**	**28164**
18 agosto	**−19676**	**20833**
17 septiembre	**−28164**	**8488**
17 octubre	**−28935**	**−6176**

e)



f) Análogamente, calculamos la aceleración media:

$$\vec{a}_A = \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{18\,\text{Ag}} - \vec{v}_{19\,\text{Jul}}}{30 \text{ día}} = \frac{\left[\left(-19676\,\vec{i} + 20833\,\vec{j}\right) - \left(-7330\,\vec{i} + 28164\,\vec{j}\right)\right] \text{ m/s}}{2592000 \text{ s}}$$

$$\vec{a}_A = \mathbf{-0{,}476\,\vec{i} - 0{,}283\,\vec{j}\ m/s^2}$$

$$\vec{a}_B = \frac{\Delta \vec{v}_B}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{17\,\text{Sep}} - \vec{v}_{18\,\text{Ag}}}{30 \text{ día}} = \frac{\left[\left(-28164\,\vec{i} + 8488\,\vec{j}\right) - \left(-19676\,\vec{i} + 20833\,\vec{j}\right)\right] \text{ m/s}}{2592000 \text{ s}}$$

$$\vec{a}_B = \mathbf{-0{,}327\,\vec{i} - 0{,}476\,\vec{j}\ m/s^2}$$

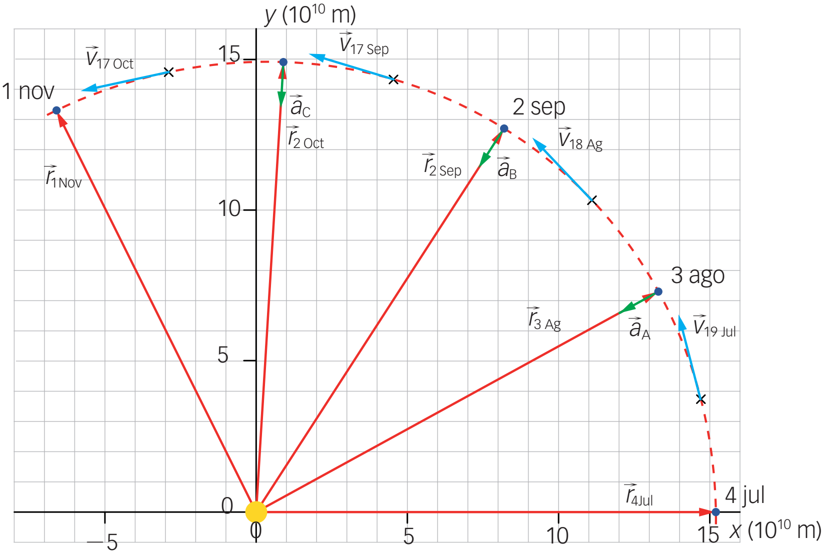
Solo falta la aceleración por el cambio de velocidad entre los dos últimos tramos:

$$\vec{a}_C = \frac{\Delta \vec{v}_C}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{17\,Oct} - \vec{v}_{17\,Sep}}{30\text{ día}} = \frac{\left[\left(-28935\,\vec{i} - 6173\,\vec{j}\right) - \left(-28164\,\vec{i} + 8488\,\vec{j}\right)\right]\text{ m/s}}{2592000\text{ s}}$$

$$\vec{a}_C = \mathbf{-0{,}030\,\vec{i} - 0{,}566\,\vec{j}\ m/s^2}$$

Fecha	r_x (10^{10} m)	r_y (10^{10} m)	Fecha	v_x (m/s)	v_y (m/s)	a_x (m/s²)	a_y (m/s²)
4 julio	15,2	0,0					
			19 julio	−7330	28164		
3 agosto	13,3	7,3				**−0,476**	**−0,283**
			18 agosto	−19676	20833		
2 septiembre	8,2	12,7				**−0,327**	**−0,476**
			17 septiembre	−28164	8488		
2 octubre	0,9	14,9				**−0,030**	**−0,566**
			17 octubre	−28935	−6176		
1 noviembre	−6,6	13,3					

g)



67 **Una paracaidista se deja caer desde un globo aerostático con aceleración 9,8 m/s² desde una altura de 500 m. La paracaidista observa cómo se lanza desde el suelo en vertical y hacia arriba un proyectil con velocidad inicial 50 m/s. El proyectil también está sometido a la aceleración de la gravedad de 9,8 m/s² hacia abajo. Determina qué velocidad del proyectil observa la paracaidista durante su caída.**

La paracaidista, al caer por el efecto de la gravedad, observa desde un sistema de referencia no inercial con $\vec{a}_{sis} = -9{,}8\,\vec{j}$ m/s². Observa al proyectil que también está sometido a la aceleración de la gravedad, por eso $\vec{a}_{obj} = -9{,}8\,\vec{j}$ m/s². Por eso:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{obj} - \vec{a}_{sis} = -9{,}8\,\vec{j}\text{ m/s}^2 - \left(-9{,}8\,\vec{j}\text{ m/s}^2\right) = 0$$

El proyectil es observado por la paracaidista sin aceleración, con velocidad constante:

$$\vec{v}\,'_{proyectil} = +\mathbf{50\,\vec{j}\ m/s}$$