Ampliación.
Integral indefinida y definida

1. Reglas de integración

Explora

Copia y completa la siguiente tabla:

$f(x)$	x^6		$\frac{x^5}{5}$		x^3		$\frac{x^6}{6}$		x		1		x^n	
$f'(x)$		$4x^3$		x^2		$5x^4$		x^3		x		$2x$		x^n

Solución:

$f(x)$	x^6	x^4	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^3}{3}$	x^3	x^5	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{x^4}{4}$	x	$\frac{x^2}{2}$	1	x^2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f'(x)$	$6x^5$	$4x^3$	x^4	x^2	$3x^2$	$5x^4$	x^5	x^3	1	x	0	$2x$	nx^{n-1}	x^n

Elabora

Calcula las siguientes integrales:

1 $\int (2x+5)^3\, dx$

Solución:
$\frac{(2x+5)^4}{8} + k$

2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solución:
$2\sqrt{x} + k$

3 $\int e^{x/2}\, dx$

Solución:
$2e^{x/2} + k$

4 $\int 5^{x+4}\, dx$

Solución:
$\frac{5^{x+4}}{\ln 5} + k$

5 $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

Solución:
$\frac{1}{2} \ln |x^2+1| + k$

6 $\int 5e^x\, dx$

Solución:
$5e^x + k$

7 $\int (8x^3 - 6x^2 + 5x - 3)\, dx$

Solución:
$2x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2} x^2 - 3x + k$

8 $\int \frac{dx}{x^5}$

Solución:
$-\frac{1}{4x^4} + k$

9 $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx$

Solución:
$\frac{5x\sqrt[5]{x^2}}{7} + k$

10 $\int (5x^7 - 6x^5 - x^2 - 4)\, dx$

Solución:
$\frac{5x^8}{8} - x^6 - \frac{x^3}{3} - 4x + k$

11 $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{2\sqrt{7x}}$

Solución:
$\dfrac{3\sqrt{7x}}{7} + k$

12 $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$

Solución:
$\dfrac{e^{3x}}{3} + k$

13 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$

Solución:
$-\dfrac{1}{x} + k$

14 $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+6x+5}\,dx$

Solución:
$\dfrac{1}{3}\ln|x^3+6x+5| + k$

15 $\displaystyle\int x(5x^2-1)^3\,dx$

Solución:
$\dfrac{(5x^2-1)^4}{40} + k$

16 $\displaystyle\int 5^{x/2}\,dx$

Solución:
$\dfrac{2\cdot 5^{x/2}}{\ln 5} + k$

17 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

Solución:
$4\sqrt[4]{x} + k$

18 $\displaystyle\int (x^2-4x)\,dx$

Solución:
$\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + k$

19 $\displaystyle\int 6x^3\,dx$

Solución:
$\dfrac{3x^4}{2} + k$

20 $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)dx$

Solución:
$\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2x^2} + k$

21 $\displaystyle\int (x^3-6x^2+1)\,dx$

Solución:
$\dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$

22 $\displaystyle\int x(x^2+5)\,dx$

Solución:
$\dfrac{1}{4}(x^2+5)^2 + k$

23 $\displaystyle\int \frac{2dx}{2x-5}$

Solución:
$\ln|2x-5| + k$

24 $\displaystyle\int (x^4-2x-5)\,dx$

Solución:
$\dfrac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$

2. Integrales indefinidas y definidas

Explora

Calcula la integral $F(x) = \displaystyle\int 2x\,dx$ tal que su gráfica pase por el punto (0, 3)

Solución:
$F(x) = x^2 + 3$

Elabora

Calcula tres primitivas de cada una de las siguientes funciones:

25 $f(x) = x + 1$

Solución:

$\dfrac{x^2}{2} + x \qquad \dfrac{x^2}{2} + x + 5 \qquad \dfrac{x^2}{2} + x - 7$

26 $f(x) = e^x$

Solución:

$e^x \qquad e^x + 2 \qquad e^x - 1$

Calcula las integrales indefinidas:

27 $\displaystyle\int (x^4 - 6x^2 + 3)\, dx$

Solución:

$\dfrac{x^5}{5} - 2x^3 + 3x + k$

28 $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$

Solución:

$\dfrac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} \qquad \dfrac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} + 7 \qquad \dfrac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} - 8$

29 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

Solución:

$\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + k$

30 $\displaystyle\int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$

Solución:

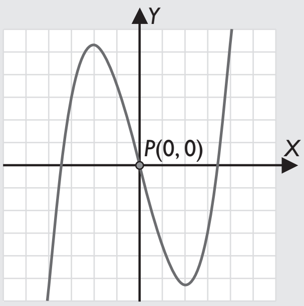
$\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \ln|x| - \dfrac{5}{x} + k$

Calcula la primitiva de las funciones para que pasen por el punto que se indica en cada caso:

31 $f(x) = x^2 - 4$ por el punto $(0, 0)$

Solución:

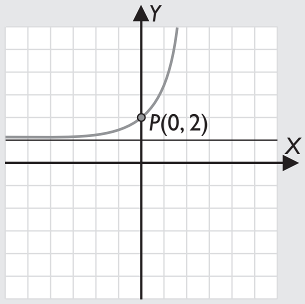
$\dfrac{x^3}{3} - 4x$



32 $f(x) = e^x$ por el punto $(0, 2)$

Solución:

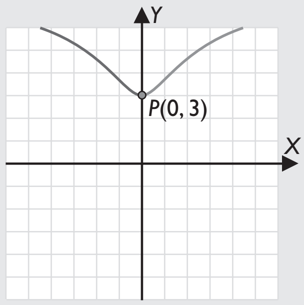
$e^x + 1$



33 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ por el punto $(0, 3)$

Solución:

$\ln|x^2 + 1| + 3$



Calcula las integrales definidas aplicando la regla de Barrow:

34 $\displaystyle\int_2^5 (x^2 - 6x + 10)\, dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x$

$F(5) - F(2) = \dfrac{50}{3} - \dfrac{32}{3} = \dfrac{18}{3} = 6\ u^2$

35 $\displaystyle\int_0^1 2e^{2x}\, dx$

Solución:

$F(x) = e^{2x}$

$F(1) - F(0) = e^2 - 1\ u^2$

36 $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$

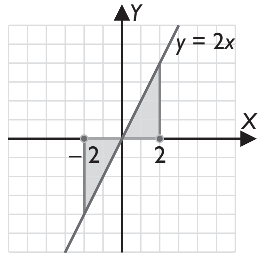
Solución:

$F(x) = \ln|x|;\ F(e) - F(1) = 1 - 0 = 1\ u^2$

3. Cálculo de áreas limitadas por curvas

Explora

Calcula contando el área del recinto limitado por el eje X y la recta $f(x) = 2x$ en el intervalo $[-2, 2]$



Solución:

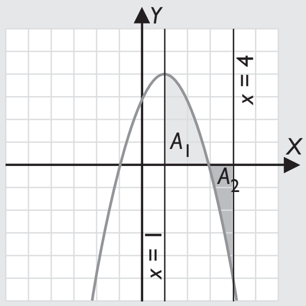
8 u^2

Elabora

Calcula el área del recinto limitado por el eje X y cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

37 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ en el intervalo $[1, 4]$

Solución:



$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$$

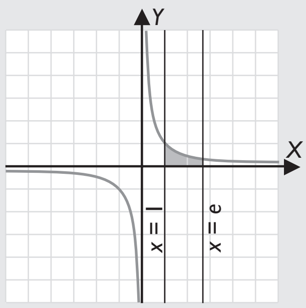
$$A_1 = |F(3) - F(1)| = \left|9 - \frac{11}{3}\right| = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = |F(4) - F(3)| = \left|\frac{20}{3} - 9\right| = \frac{7}{3}$$

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}\ \text{u}^2$$

38 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo $[1, e]$

Solución:

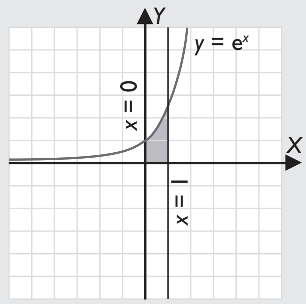


$F(x) = \ln |x|$

$\text{Área} = |F(e) - F(1)| = |1 - 0| = 1\ \text{u}^2$

39 $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$

Solución:



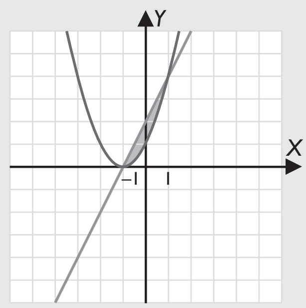
$F(x) = e^x$

$A = |F(1) - F(0)| = e - 1u^2$

40 Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad g(x) = 2x + 2$$

Solución:



$f(x) - g(x) = x^2 - 1$

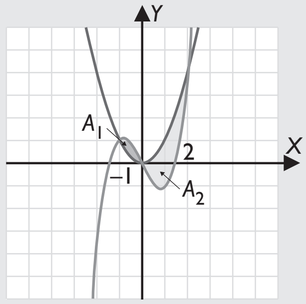
$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\text{Área} = |F(1) - F(-1)| = \left|-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$$

41 Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = x^3 - 2x$$
$$g(x) = x^2$$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$

$f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2$

$A_1 = |F(0) - F(-1)| = \left|0 - \dfrac{5}{12}\right| = \dfrac{5}{12}$

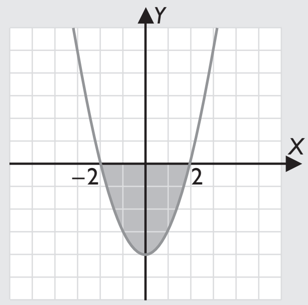
$A_2 = |F(2) - F(0)| = \left|-\dfrac{8}{3} - 0\right| = \dfrac{8}{3}$

Área $= A_1 + A_2 = \dfrac{5}{12} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{37}{12}$ u^2

42 Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = x^2 - 4$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

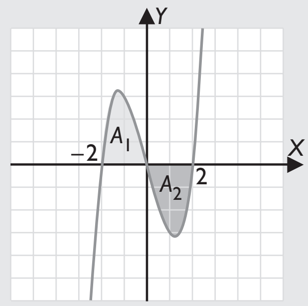
$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

Área $= |F(2) - F(-2)| = \left|-\dfrac{16}{3} - \dfrac{16}{3}\right| = \dfrac{32}{3}$ u^2

43 Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$

$A_1 = |F(0) - F(-2)| = |0 + 4| = 4$

$A_2 = |F(2) - F(0)| = |-4 - 0| = 4$

Área $= A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8$ u^2

4. Aplicaciones de las integrales

Explora

Sea la función $f(x) = 2x$

a) Calcula mentalmente el área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el intervalo [0, 3]

b) Calcula la expresión $A(x) = \displaystyle\int_0^x 2t\, dt$ aplicando la regla de Barrow, y calcula $F(3)$. ¿Cómo son los resultados?

Solución:

a) 9 u^2

b) $F(x) = x^2 \Rightarrow F(3) = 9$

Los resultados son iguales.

Elabora

44 Expresa la función área de la función

$$f(x) = x + 1$$

en el intervalo $[0, x]$ y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y $f(x)$ en el intervalo $[0, 5]$

Solución:

$$A(x) = \int_0^x (t + 1)\,dt = \frac{x^2}{2} + x$$

$$A(5) = \frac{35}{2}\ \text{u}^2$$

45 Expresa la función área de la función

$$f(x) = x^2 + 2$$

en el intervalo $[0, x]$ y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$

Solución:

$$A(x) = \int_0^x (t^2 + 2)\,dt = \frac{x^3}{3} + 2x$$

$$A(1) = \frac{7}{3}\,u^2$$

46 La velocidad de un móvil en metros por segundo se da por la siguiente función:

$$v(t) = 6 - \frac{t}{2}$$

donde t se mide en segundos. Calcula el espacio recorrido por el móvil en los 5 primeros segundos.

Solución:

$$e = \int_0^5 \left(6 - \frac{t}{2}\right) dt = \frac{95}{4}\ \text{m}$$

47 Calcula la función que expresa la velocidad de un coche que mantiene una aceleración constante de $3\ \text{m/s}^2$

Solución:

$$v(t) = \int_0^t 3\,dt = 3t$$

48 Una empresa que hace cajas de cartón para embalar tiene la siguiente función de ingreso marginal, en miles de euros:

$$i(x) = 8 - \frac{x}{2}$$

donde x es el número de cajas vendidas en miles.

a) ¿Qué ingreso se obtiene por la venta de 4 000 cajas?

b) ¿Cuál es el ingreso adicional al pasar de 4 000 a 5 000 cajas vendidas?

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^4 \left(8 - \frac{x}{2}\right) dx = 28$ mil euros

b) $\displaystyle\int_4^5 \left(8 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{23}{4}$ mil euros

49 El coste marginal, en millones de euros, de una empresa al fabricar motos se expresa por la función:

$$c(x) = 3 - \frac{x}{2}$$

donde x se mide en miles de unidades. ¿Cuál es el coste adicional al pasar de 2 000 a 4 000 unidades?

Solución:

$\displaystyle\int_2^4 \left(3 - \frac{x}{2}\right) dx = 3$ millones de euros

Elabora actividades de las secciones

1. Reglas de integración

Calcula las siguientes integrales:

50 $\int \frac{dx}{x}$

Solución:
$\ln |x| + k$

51 $\int (-3x + 2)^5\, dx$

Solución:
$-\frac{(-3x+2)^6}{18} + k$

52 $\int \frac{dx}{x^6}$

Solución:
$-\frac{1}{5x^5} + k$

53 $\int x\, e^{5x^2}\, dx$

Solución:
$\frac{e^{5x^2}}{10} + k$

54 $\int (-7x^4 + 4x^3 - x + 1)\, dx$

Solución:
$-\frac{7x^5}{5} + x^4 - \frac{x^2}{2} + x + k$

55 $\int \frac{4\, dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:
$\frac{8\sqrt{3x}}{3} + k$

56 $\int \sqrt[7]{x^3}\, dx$

Solución:
$\frac{7x\sqrt[7]{x^3}}{10} + k$

57 $\int 5^{2x-1}\, dx$

Solución:
$\frac{5^{2x-1}}{2 \ln 5} + k$

58 $\int \frac{2}{3} e^x\, dx$

Solución:
$\frac{2}{3} e^x + k$

59 $\int \frac{2x-1}{x^2 - x}\, dx$

Solución:
$\ln |x^2 - x| + k$

60 $\int (-3x + 1)^2\, dx$

Solución:
$-\frac{(-3x+1)^3}{9} + k$

61 $\int e^{x/5}\, dx$

Solución:
$5e^{x/5} + k$

62 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$

Solución:
$\frac{2\sqrt{5x-1}}{5} + k$

63 $\int 3^{2x+1}\, dx$

Solución:
$\frac{3^{2x+1}}{2 \ln 3} + k$

64 $\int \sqrt[7]{(3x+5)^4}\, dx$

Solución:
$\frac{7(3x+5)\sqrt[7]{(3x+5)^4}}{33} + k$

65 $\int (5x^4 - 9x^2 - 6x + 1)\, dx$

Solución:
$x^5 - 3x^3 - 3x^2 + x + k$

66 $\int \frac{dx}{(2x-1)^5}$

Solución:
$-\frac{1}{8(2x-1)^4} + k$

67 $\int e^{-x}\, dx$

Solución:
$-e^{-x} + k$

68 $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{x}{x^2+3}\right) dx$

Solución:
$-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 3) + k$

69 $\int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x+2} + \frac{8}{x^3}\right) dx$

Solución:
$x^3 + x - \ln|x+2| - \frac{4}{x^2} + k$

70 $\int (2x + e^{5x})\, dx$

Solución:
$x^2 + \frac{1}{5} e^{5x} + k$

71 $\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

Solución:
$\frac{x^2}{2} + \ln|x| + k$

72 $\int (6x^2 - x + 2)\, dx$

Solución:
$2x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x + k$

73 $\int \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 8x + 1\right) dx$

Solución:
$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 4x^2 + x + k$

2. Integrales indefinidas y definidas

Calcula tres primitivas de cada una de las siguientes funciones:

74 $f(x) = 6x^2 - 8x - 3$

Solución:
$F_1(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x$
$F_2(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 5$
$F_3(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 4$

75 $f(x) = \frac{2}{x}$

Solución:
$F_1(x) = 2 \ln|x|$
$F_2(x) = 2 \ln|x| + 7$
$F_3(x) = 2 \ln|x| - 8$

76 $f(x) = e^x$

Solución:
$F_1(x) = e^x$ $F_2(x) = e^x + 5$ $F_3(x) = e^x - 7$

77 $f(x) = \frac{6}{x^3}$

Solución:
$F_1(x) = -\frac{3}{x^2}$ $F_2(x) = -\frac{3}{x^2} + 9$ $F_3(x) = -\frac{3}{x^2} - 7$

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

78 $\int (-x^3 + 3x^2 + 4x - 1)\, dx$

Solución:
$-\frac{x^4}{4} + x^3 + 2x^2 - x + k$

79 $\int (x^2 - e^{x/2})\, dx$

Solución:
$\frac{x^3}{3} - 2e^{x/2} + k$

80 $\int \sqrt[5]{x^4}\, dx$

Solución:
$\frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9} + k$

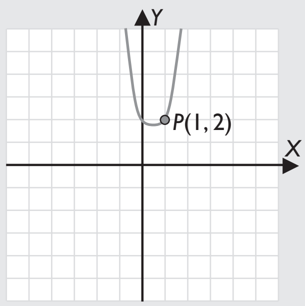
81 $\int \left((3x-1)^2 + \frac{6}{2x+3} - \frac{4}{(5x-1)^2}\right) dx$

Solución:
$\frac{(3x-1)^3}{9} + 3\ln|2x+3| + \frac{4}{5(5x-1)} + k$

Calcula la primitiva de las siguientes funciones para que pasen por el punto que se indica en cada caso:

82 $f(x) = (2x - 1)^3$ por el punto $(1, 2)$

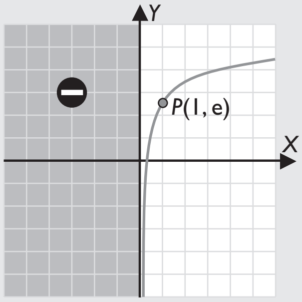
Solución:
$\frac{(2x-1)^4}{8} + \frac{15}{8}$



83 $f(x) = \frac{1}{x}$ por el punto $(1, e)$

Solución:

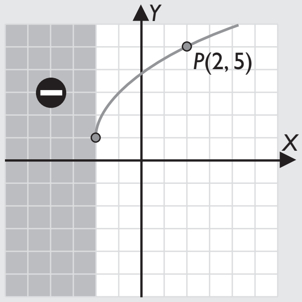
$\ln|x| + e$



84 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ por el punto (2, 5)

Solución:

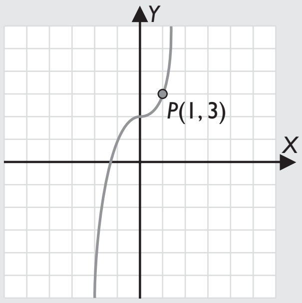
$F(x) = 1 + 2\sqrt{x+2}$



85 $F(x) = 3x^2$ por el punto (1, 3)

Solución:

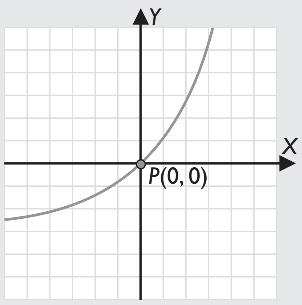
$f(x) = x^3 + 2$



86 $f(x) = e^{x/3}$ por el punto (0, 0)

Solución:

$F(x) = 3e^{x/3} - 3$



Calcula las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow:

87 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$

$F(1) - F(-1) = -\dfrac{4}{3}$

88 $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{x}\, dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$

$F(3) - F(0) = 2\sqrt{3}$

89 $\displaystyle\int_{1}^{3} 2^x\, dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2}$

$F(3) - F(1) = \dfrac{6}{\ln 2}$

90 $\displaystyle\int_{0}^{1} 4x^2\, dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{4x^3}{3}$

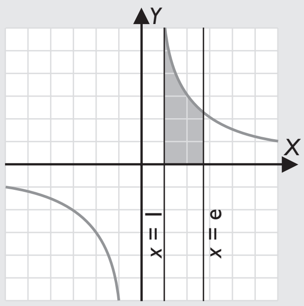
$F(1) - F(0) = \dfrac{4}{3}$

3. Cálculo de áreas limitadas por curvas

Calcula el área del recinto limitado por el eje *X* y cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

91 $f(x) = \dfrac{6}{x}$ en el intervalo de integración [1, e]

Solución:

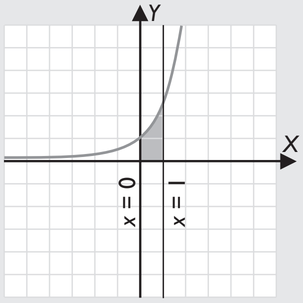


$F(x) = 6\ln|x|$

Área $= |F(e) - F(1)| = |6 - 0| = 6\ u^2$

92 $f(x) = e^x$ en el intervalo de integración [0, 1]

Solución:

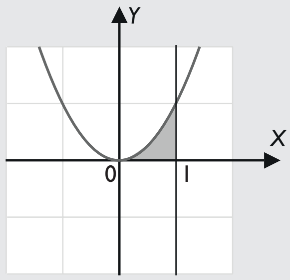


$F(x) = e^x$

Área $= |F(1) - F(0)| = e - 1$ u²

93 $f(x) = x^2$ en el intervalo de integración [0, 1]

Solución:



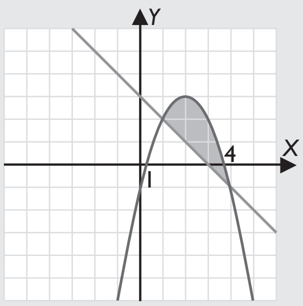
$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

Área $= |F(1) - F(0)| = \dfrac{1}{3}$ u²

94 Calcula el área comprendida entre las siguientes funciones:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 1$$
$$g(x) = -x + 3$$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$

$f(x) - g(x) = -x^2 + 5x - 4$

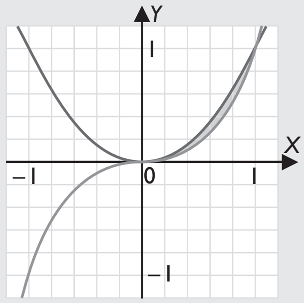
$F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 - 4x$

Área $= |F(4) - F(1)| = \left|\dfrac{8}{3} + \dfrac{11}{6}\right| = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}$ u²

95 Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = x^3$$
$$g(x) = x^2$$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

$g(x) - f(x) = x^2 - x^3$

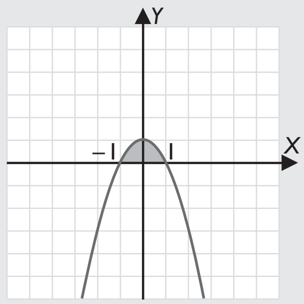
$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$

Área $= |F(1) - F(0)| = \left|\dfrac{1}{12} - 0\right| = \dfrac{1}{12}$ u²

96 Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = -x^2 + 1$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

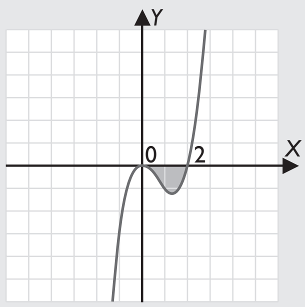
$F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x$

Área $= |F(1) - F(-1)| = \left|\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$ u²

97 Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3}$

Área $= |F(2) - F(0)| = \left|-\dfrac{4}{3} - 0\right| = \dfrac{4}{3}$ u^2

4. Aplicaciones de las integrales

98 Expresa la función área de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en el intervalo $[0, x]$ y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y $f(x)$ en el intervalo $[0, 3]$

Solución:

$A(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2 + 2t)\,dt = \dfrac{x^3}{3} + x^2 \Rightarrow A(3) = 18$ u^2

99 Expresa la función área de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, x]$ y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$

Solución:

$A(x) = \displaystyle\int_0^x e^t\,dt = e^x \Rightarrow A(1) = e\ u^2$

100 La velocidad de un móvil en metros por segundo (m/s) se da por la función: $v(t) = 2 + t$, donde t se mide en segundos. Calcula el espacio recorrido por el móvil en los 6 primeros segundos.

Solución:

$e = \displaystyle\int_0^6 (2 + t)\,dt = 30$ m

101 Calcula las funciones que expresan la velocidad y el espacio recorrido por una pelota que cae libremente al vacío.

Solución:

Suponemos $g = 10$ m/s^2

$v(t) = \displaystyle\int_0^t 10\,dt = 10t$ $\qquad e(t) = \displaystyle\int_0^t 10t\,dt = 5t^2$

102 La función de ingreso marginal de un producto, en millones de euros, es:

$$i(x) = 15 - 2x$$

donde x es el número de unidades vendidas en miles.

a) ¿Qué ingreso se obtiene por la venta de 2 000 unidades?

b) ¿Cuál es el ingreso adicional al pasar de 2 000 a 3 000 unidades vendidas?

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^2 (15 - 2x)\,dx = 26$ millones de euros

b) $\displaystyle\int_2^3 (15 - 2x)\,dx = 10$ millones de euros

Elabora actividades para reforzar

Calcula:

103 $\displaystyle\int \left(x^5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

Solución:

$\dfrac{x^6}{6} + \ln|x| + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + k$

104 $\displaystyle\int \left((x + 3)^4 - \frac{2}{2x + 3} + \frac{3}{(3x - 1)^2}\right) dx$

Solución:

$\dfrac{(x + 3)^5}{5} - \ln|2x + 3| - \dfrac{1}{3x - 1} + k$

105 $\displaystyle\int \left(e^{x/2} - 7^{2x-3} + \frac{x}{x^2 - 9}\right) dx$

Solución:

$2e^{x/2} - \dfrac{7^{2x-3}}{2\ln 7} + \dfrac{1}{2}\ln|x^2 - 9| + k$

106 $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 2}{x^2}\,dx$

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es la división, que se puede hacer mentalmente:

$f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

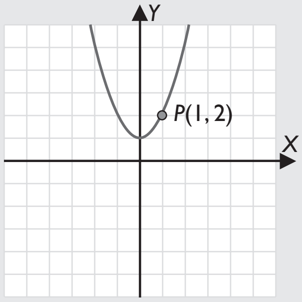
$\dfrac{x^2}{2} - \ln(x) - \dfrac{2}{x} + k$

Calcula la primitiva de las siguientes funciones para que pasen por el punto que se indica en cada caso y haz el dibujo de la función integral para comprobarlo:

107 $f(x) = 2x$ por el punto (1, 2)

Solución:

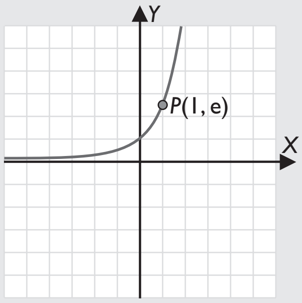
$F(x) = x^2 + 1$



108 $f(x) = e^x$ por el punto (1, e)

Solución:

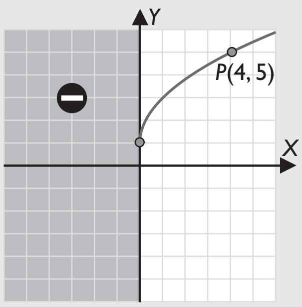
$F(x) = e^x$



109 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ por el punto (4, 5)

Solución:

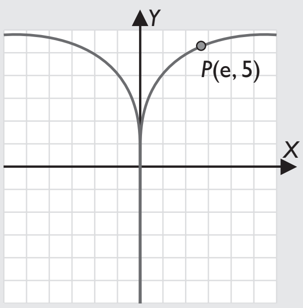
$F(x) = 2\sqrt{x} + 1$



110 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ por el punto (e, 5)

Solución:

$F(x) = \ln|x| + 4$



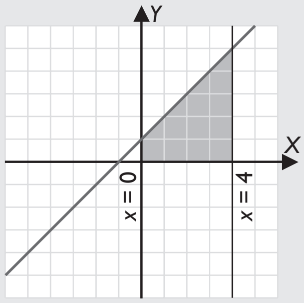
Calcula las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow, dibuja cada una de las funciones del integrando y haz la interpretación geométrica de la regla de Barrow:

111 $\displaystyle\int_0^4 (x + 1)\, dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$

$F(4) - F(0) = 12 - 0 = 12 \text{ u}^2$



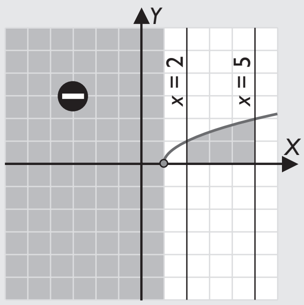
El resultado obtenido, 12 u², es el área de la zona coloreada.

112 $\displaystyle\int_2^5 \sqrt{x - 1}\, dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{2(x - 1)\sqrt{x - 1}}{3}$

$F(5) - F(2) = \dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3} \text{ u}^2$



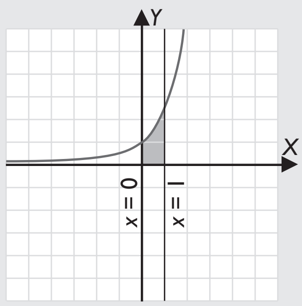
El resultado obtenido, $\dfrac{14}{3}$ u², es el área de la zona coloreada.

113 $\displaystyle\int_0^1 e^x\, dx$

Solución:

$F(x) = e^x$

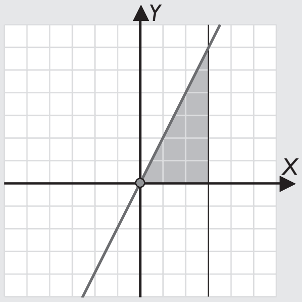
$F(1) - F(0) = e - 1 \text{ u}^2$



El resultado obtenido, e – 1 u², es el área de la zona coloreada.

114 $\displaystyle\int_0^3 2x\,dx$

Solución:



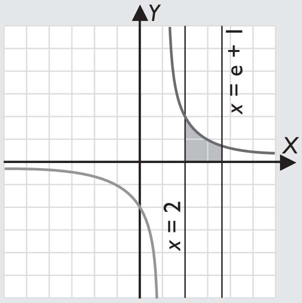
$F(x) = x^2$

Área $= |F(1) - F(0)| = 9$ u^2

Calcula el área del recinto limitado por el eje X y cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

115 $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ en el intervalo $[2, e + 1]$

Solución:

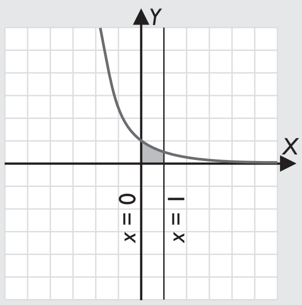


$F(x) = 2 \ln |x - 1|$

Área $= |F(e + 1) - F(2)| = |2 - 0| = 2$ u^2

116 $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, 1]$

Solución:



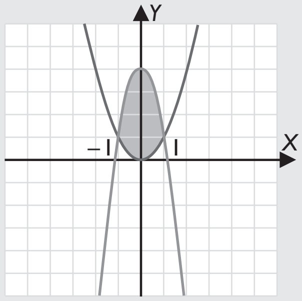
$F(x) = -e^{-x}$

Área $= |F(1) - F(0)| = \left|-\dfrac{1}{e} + 1\right| = 1 - \dfrac{1}{e}$ u^2

117 Calcula el área comprendida entre las funciones:

$f(x) = -3x^2 + 4 \qquad g(x) = x^2$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

$f(x) - g(x) = -4x^2 + 4$

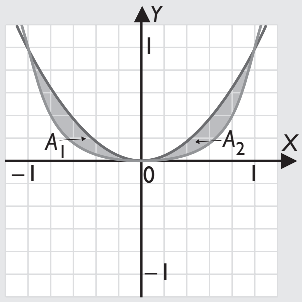
$F(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 + 4x$

Área $= |F(1) - F(-1)| = \left|\dfrac{8}{3} + \dfrac{8}{3}\right| = \dfrac{16}{3}$ u^2

118 Calcula el área comprendida entre las funciones:

$f(x) = x^4 \qquad g(x) = x^2$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

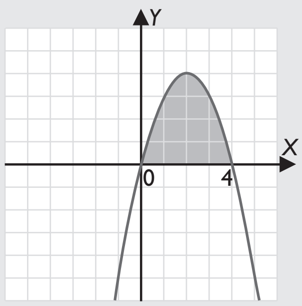
$f(x) - g(x) = x^4 - x^2$

$F(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3}$

$A_1 = A_2 = \dfrac{2}{15}$; área $= \dfrac{4}{15}$ u^2

119 Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función: $f(x) = -x^2 + 4x$

Solución:



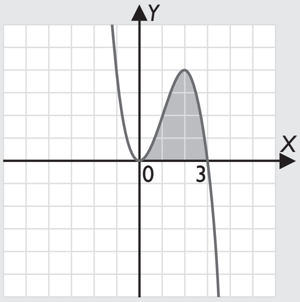
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$

$F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2$

Área $= |F(4) - F(0)| = \left|\dfrac{32}{3} - 0\right| = \dfrac{32}{3}$ u^2

120 Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función: $f(x) = 3x^2 - x^3$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

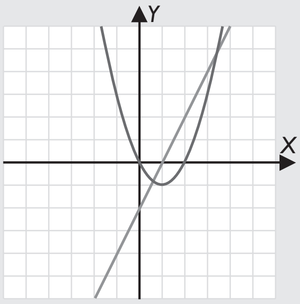
$F(x) = x^3 - \dfrac{x^4}{4}$

$\text{Área} = |F(3) - F(0)| = \left|\dfrac{27}{4} - 0\right| = \dfrac{27}{4}\ u^2$

121 Expresa la función área $A(x)$ en el intervalo $[0, x]$ limitada por el eje X y la función $f(x) = 2x - 2$. Dibuja la gráfica $f(x)$ y $A(x)$ e interpreta el resultado.

Solución:

$A(x) = \int_0^x (2t - 2)\, dt = x^2 - 2x$



La función $A(x)$ halla el área comprendida entre el eje X y la recta $y = 2x - 2$ en el intervalo $[0, x]$

122 Expresa la función área $A(x)$ en el intervalo $[1, x]$ limitada por el eje X y la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

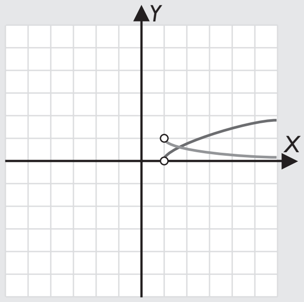
a) Dibuja la gráfica $f(x)$ y $A(x)$ e interpreta el resultado.

b) Calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y la función $f(x)$ en el intervalo $[1, e]$

Solución:

$A(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t}\, dt = \ln|x|$

a)



La función $A(x)$ halla el área comprendida entre el eje X y la hipérbola $y = 1/x$ en el intervalo $[1, x]$

b) $A(e) = \ln e = 1\ u^2$

123 La velocidad de un móvil en metros por segundo viene dada por la función $v(t) = 5 + 2t$, donde t se mide en segundos. Calcula el espacio recorrido por el móvil entre los 3 y 5 segundos.

Solución:

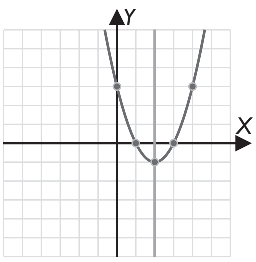
$e(t) = \int (5 + 2t)\, dt = 5t + t^2$

$e(5) - e(3) = 50 - 24 = 26$ m

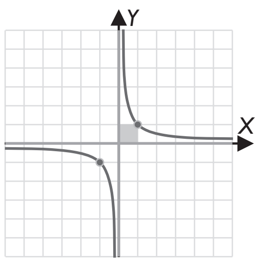
Elabora problemas

124 Dadas las curvas de los siguientes gráficos, halla la fórmula de cada una de ellas y luego calcula la integral indefinida.

a)



b)



Solución:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

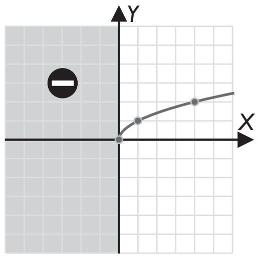
$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + k$

b) $y = \dfrac{1}{x}$

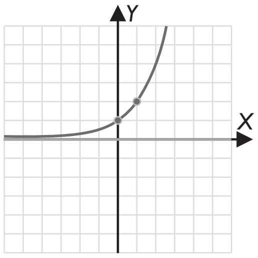
$F(x) = \ln|x| + k$

125 Dadas las curvas de los siguientes gráficos, halla la fórmula de cada una de ellas y luego calcula la integral indefinida.

a)



b)



Solución:

a) $y = \sqrt{x}$

$F(x) = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + k$

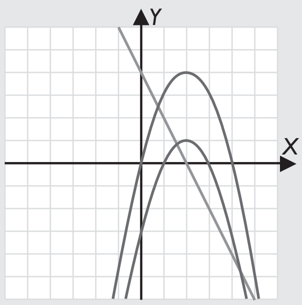
b) $y = 2^x$

$F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} + k$

126 Dada la recta $y = -2x + 4$

a) Haz el dibujo de la recta.
b) Calcula dos primitivas.
c) Representa en el mismo dibujo de la recta las dos primitivas.
d) ¿En qué se parecen las dos primitivas?

Solución:

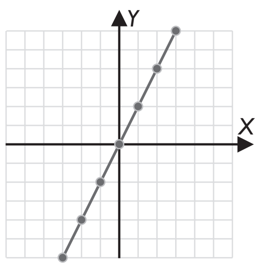


$F_1(x) = -x^2 + 4x$

$F_2(x) = -x^2 + 4x - 3$

Una primitiva se obtiene de la otra por una traslación.

127 Dada la recta del siguiente gráfico:



a) Halla la ecuación de la recta.

b) Calcula dos primitivas.

c) Representa en el mismo dibujo de la recta las dos primitivas.

d) ¿En qué se parecen las dos primitivas?

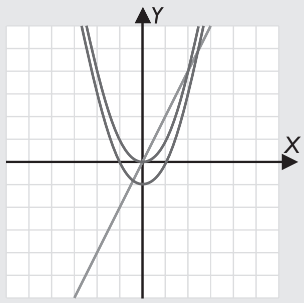
Solución:

a) $y = 2x$

b) $F_1(x) = x^2$

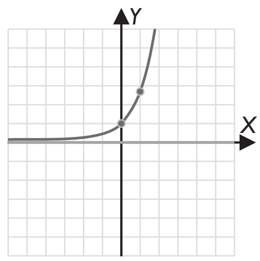
$F_2(x) = x^2 - 1$

c)



d) Una primitiva se obtiene de la otra por traslación.

128 Dada la curva del siguiente gráfico:



a) Halla la fórmula de la función.

b) Calcula una primitiva y represéntala.

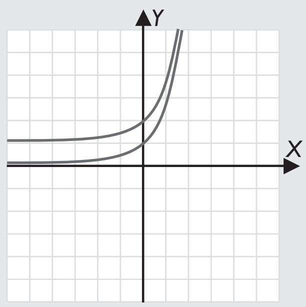
c) ¿En qué se parecen la primitiva y la función?

Solución:

a) $y = e^x$

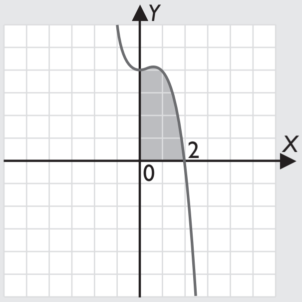
b) $F(x) = e^x + 1$

c) Una primitiva se obtiene de la otra por una traslación.



129 Calcula el área comprendida entre los ejes de coordenadas y la función $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$

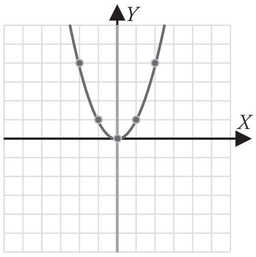
Solución:



$$F(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 4x$$

$$\text{Área} = |F(2) - F(0)| = \left|\frac{20}{3} - 0\right| = \frac{20}{3}\ \text{u}^2$$

130 Dada la curva del siguiente gráfico, halla la fórmula y luego calcula la integral indefinida.



Solución:

$f(x) = x^2$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + k$$

131 Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = -x^2 + 5$$

$$g(x) = -4$$

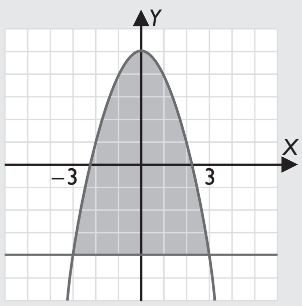
Solución:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3$

$f(x) - g(x) = -x^2 + 9$

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 9x$$

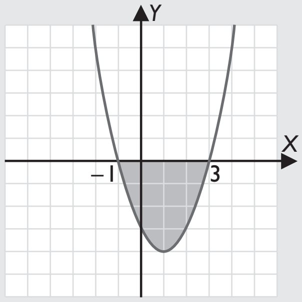
$\text{Área} = |F(3) - F(-3)| = |18 + 18| = 36\ \text{u}^2$



132 Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

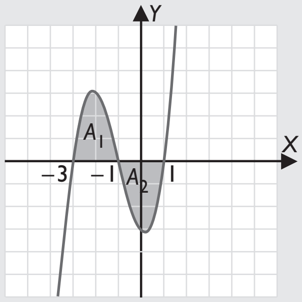
$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$$\text{Área} = |F(3) - F(-1)| = \left|-9 - \frac{5}{3}\right| = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$

133 Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x$$

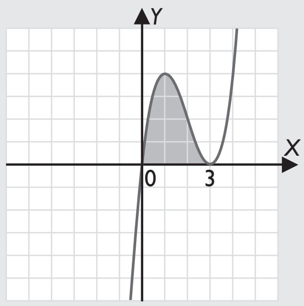
$A_1 = A_2 = 4$

$\text{Área} = 8\ \text{u}^2$

134 Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Solución:



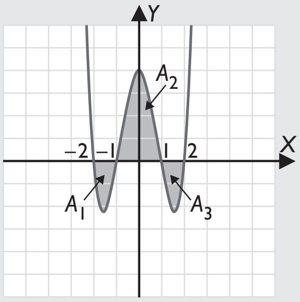
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{9x^2}{2}$

$\text{Área} = |F(3) - F(0)| = \left|\dfrac{27}{4} - 0\right| = \dfrac{27}{4}\ u^2$

135 Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$

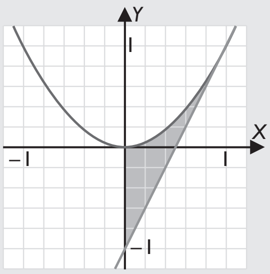
$F(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{5x^3}{3} + 4x$

$A_1 = A_3 = \dfrac{22}{15}, A_2 = \dfrac{76}{15}$

$\text{Área} = 8\ u^2$

136 Dada la función $f(x) = x^2$ y una tangente a dicha curva $y = 2x - 1$, halla el punto de tangencia y el área comprendida por el eje de ordenadas, la curva y la tangente.

Solución:



$x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$

Punto de tangencia: $P(1, 1)$

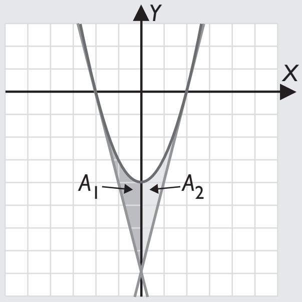
$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1$

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$

$\text{Área} = \dfrac{1}{3}\ u^2$

137 Calcula el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 4$ y las tangentes a dicha curva en los puntos de corte con el eje de abscisas.

Solución:



$y = x^2 - 4$ corta al eje de abscisas en $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$

$y' = 2x$

Recta tangente en el punto $A(-2, 0)$

$y'(-2) = -4$

$y = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 8$

$f(x) - g(x) = x^2 + 4x + 4$

$A_1 = \dfrac{8}{3}\ u^2$

Recta tangente en el punto $B(2, 0)$

$y'(2) = 4$

$y = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8$

$f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 4$

$A_2 = \dfrac{8}{3}\ u^2$

$\text{Área} = \dfrac{16}{3}\ u^2$

138 El ritmo de crecimiento de una población de aves viene dado por la función:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8$$

donde x se mide en años, y $f(x)$, en miles. ¿En cuánto aumentarán las aves durante el segundo y el tercer año?

Solución:

El segundo y tercer año es el tiempo que hay entre el primer año y el tercero.

$$\int_1^3 (-x^2 + 2x + 8)\, dx = \frac{46}{3} \text{ miles de aves}$$

139 Una tubería se rompe y se pierde agua a una velocidad determinada por la función:

$$f(t) = 1 + 2t$$

donde t se mide en minutos, y $f(t)$, en litros por minuto.

a) ¿Cuál es la función que da la cantidad de agua perdida al cabo de x minutos?

b) ¿Cuánta agua se pierde durante la cuarta hora?

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x (1 + 2t)\, dt = x + x^2$

b) $F(4) - F(3) = 20 - 12 = 8$ L

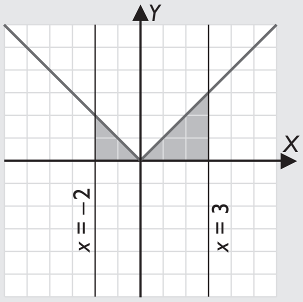
Elabora problemas de más nivel

140 Representa la función:

$$y = |x|$$

y sin utilizar el cálculo integral halla el área comprendida entre el eje X y la función en el intervalo $[-2, 3]$

Solución:

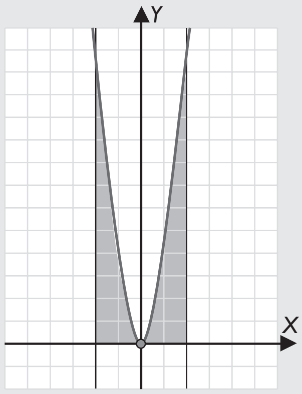


Área = 6,5 u²

141 Calcula el área del recinto limitado por el eje X y la siguiente función en el intervalo de integración que se indica:

$f(x) = 3x^2$ en el intervalo de integración $[-2, 2]$

Solución:

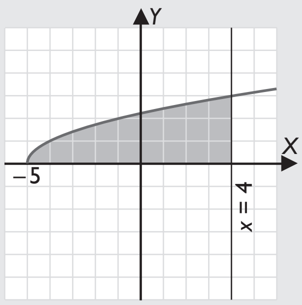


$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} 3x^2\,dx = 16 \text{ u}^2$$

142 Calcula el área comprendida entre el eje X, la recta $x = 4$ y la función:

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

Solución:

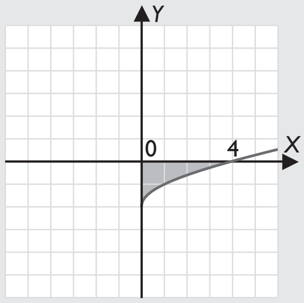


$$\text{Área} = \int_{-5}^{4} \sqrt{x+5}\,dx = 18 \, u^2$$

143 Calcula el área comprendida entre los ejes y la función:

$$f(x) = -2 + \sqrt{x}$$

Solución:



$$\text{Área} = \left| \int_0^4 \left(-2 + \sqrt{x}\right) dx \right| = \frac{8}{3} \text{ u}^2$$

144 Dadas las funciones:

$$f(x) = kx^2 \qquad g(x) = x$$

halla el valor de k para que el área comprendida entre las dos curvas sea 8/3 u²

Solución:

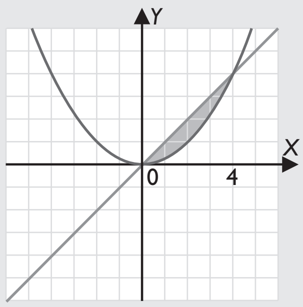
Resolviendo la ecuación $kx^2 = x$ se obtiene $x = 0$ y $x = 1/k$

$$\int_0^{1/k} (x - kx^2)\,dx = \frac{1}{6\,k^2}$$

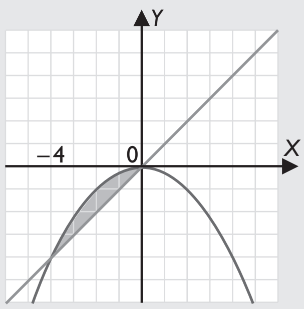
Resolviendo la ecuación:

$$\frac{1}{6k^2} = \frac{8}{3} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{4}$$

a) $k = \dfrac{1}{4}$



b) $k = -\dfrac{1}{4}$

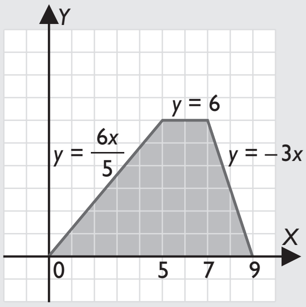


145 Un móvil parte del reposo y tarda 5 segundos en alcanzar una velocidad de 6 m/s. Mantiene esa velocidad durante 2 segundos y comienza a frenar hasta pararse en 2 segundos. Calcula el espacio que ha recorrido.

Solución:

$$\text{Área} = \int_0^5 \frac{6x}{5}\,dx + \int_5^7 6\,dx + \int_7^9 (-3x + 27)\,dx =$$

$$= 15 + 12 + 6 = 33 \text{ m}$$



146 El número de nacimientos, en miles, en una población viene dado por la función: $f(x) = -x^2 + 6x$

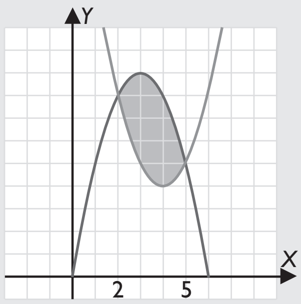
donde x se mide en años.

El número de muertes, en miles, en la población viene dado por la función: $g(x) = x^2 - 8x + 20$

donde x se mide en años.

Calcula la variación de población entre el segundo y quinto año.

Solución:



Variación de la población:

$f(x) - g(x) = -2x^2 + 14x - 20$

$$\int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20)\,dx =$$

$= 9$ mil personas

147 El coste marginal, en millones de euros, de una empresa al fabricar juguetes se expresa por la función

$$c(x) = 2 + \frac{x}{3}$$

donde x se mide en miles de unidades.

¿Cuál es el coste adicional al pasar de 2 000 a 3 000 unidades?

Solución:

Variación de la población:

$$\int_2^5 \left(2 + \frac{x}{3}\right) dx = \frac{19}{2} \text{ millones de euros}$$

148 El beneficio marginal, en millones de euros, que se obtiene de un determinado producto viene dado por la función:

$$b(x) = -x^2 + 4x + 5$$

donde x son, en miles, las unidades que se han producido y se han vendido.

Calcula el beneficio conseguido al aumentar la producción de 2 000 a 4 000 unidades.

Solución:

$$\int_2^4 (-x^2 + 4x - 5)\,dx = \frac{46}{3} \text{ millones de euros}$$

Evaluación final

Opción A

Ejercicio 1

a) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 9}$

b) Resuelve la siguiente ecuación: $\log (8x + 4) - \log x = 4 \log 2$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(x - 3)\,(x + 2)}{(x + 3)\,(x - 3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(x + 2)}{x + 3} = \dfrac{3(3 + 2)}{3 + 3} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$

b) $\log (8x + 4) - \log x = 4 \log 2$

$\log \dfrac{8x + 4}{x} = \log 2^4 \Rightarrow \dfrac{8x + 4}{x} = 16$

$8x + 4 = 16x$

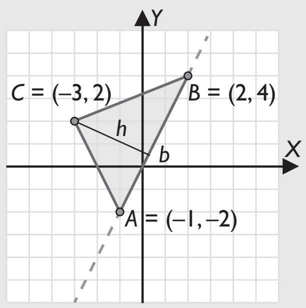
$4 = 8x$

$x = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 2

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(-1, -2)$, $B(2, 4)$ y $C(-3, 2)$. Calcula el área de dicho triángulo.

Solución:



a) Longitud de la base:

$b = d(A, B) \Rightarrow b = \sqrt{(2 + 1)^2 + (4 + 2)^2} = 3\sqrt{5}$ unidades

b) Altura:

Ecuación de la recta r que contiene al lado AB:

Punto $A(-1, -2)$ y pendiente: $m_{AB} = \dfrac{4 + 2}{2 + 1} = 2$

$y = 2(x + 1) - 2 \Rightarrow 2x - y = 0$

$h = d(C, r) = \dfrac{|2 \cdot (-3) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ unidades

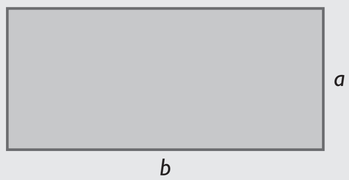
Área del triángulo

c) $A = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{5}} = 12$ unidades cuadradas

Ejercicio 3

Para vallar una finca rectangular de 800 m² se han utilizado 120 m de cerca. Calcula sus dimensiones.

Solución:



a = altura

b = base

$\left.\begin{aligned} a + b &= 60 \\ ab &= 800 \end{aligned}\right\}$

Resolviendo el sistema se obtiene $b = 40$, $a = 20$

La finca mide 40 m por 20 m

Ejercicio 4

Dada la función: $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

a) Halla los máximos y mínimos relativos y estudia el crecimiento. Halla las asíntotas.

b) Con los datos anteriores representa en unos ejes coordenados las asíntotas y dibuja la curva.

Solución:

a) Máximo relativo: $A(0, -3)$

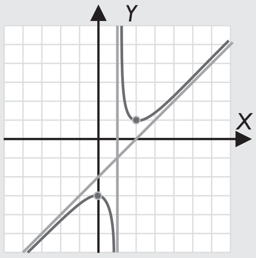
Mínimo relativo: $B(2, 1)$

Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

b) Asíntotas:

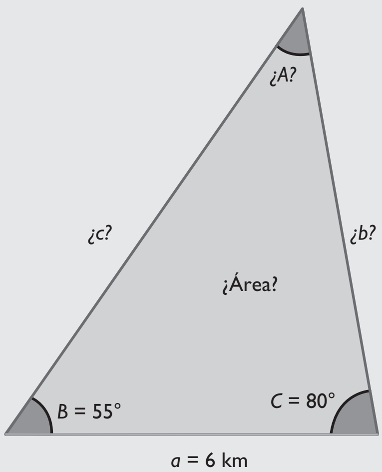
- Verticales: $x = 1$
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: $y = x - 2$



Ejercicio 5

Se desea unir tres localidades *A, B* y *C* entre sí con caminos rectos. La distancia desde *B* a *C* es de 6 km, el ángulo correspondiente a *B* mide 55° y el de C mide 80°. Calcula las distancias de *A* a *B* y de *A* a *C* y el área del triángulo formado.

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 6$ km $B = 55°$ $C = 80°$	A	$A = 180° - (B + C)$	$A = 180° - (55° + 80°) = 45°$
	b	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = \dfrac{a \cdot \text{sen } B}{\text{sen } A}$	$b = \dfrac{6 \cdot \text{sen } 55°}{\text{sen } 45°} = 6{,}95$ km
	c	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A}$	$c = \dfrac{6 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 45°} = 8{,}36$ km
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} 6 \cdot 6{,}95 \text{ sen } 80° = 20{,}53 \text{ km}^2$

Opción B

Ejercicio 1

a) Calcula: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x})$

b) Resuelve la siguiente ecuación: $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 4x})(x + \sqrt{x^2 + 4x})}{x + \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 4x)}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{x + x} = -2$$

b) $4 \cdot 4^x + 2^3 \cdot 2^x = 320$

Hacemos el cambio de variable $2^x = z$

$4z^2 + 8z = 320$

$z^2 + 2z - 80 = 0$

Se obtiene $z = -10$, $z = 8$

De $z = -10$ no se obtiene ninguna solución

$z = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

Ejercicio 2

Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno entre barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la de la cebada, mientras que el terreno en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total del cultivo de trigo y de cebada. ¿Cuántas hectáreas hay de cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

Solución:

b = Barbecho

t = Trigo

c = Cebada

$$\left.\begin{aligned} b + t + c &= 10 \\ t &= c + 2 \\ b &= t + c - 6 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

Barbecho = 2 hectáreas

Trigo = 5 hectáreas

Cebada = 3 hectáreas

Ejercicio 3

Dadas las rectas: $r \equiv y = x + 2$ y $s \equiv \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= -2 + t \end{aligned}\right\}; t \in R$

a) Calcula la distancia entre ellas.

b) Calcula el ángulo que forman.

Solución:

Vamos a estudiar la posición relativa.

Recta r: $m = 1 \Rightarrow$ vector director $v = (1, 1)$

Recta s: Vector director $v = (1, 1)$

Las dos rectas son paralelas.

a) Se toma un punto en una de ellas y hay que calcular la distancia de ese punto a la otra recta.

Un punto de la recta s es $A(0, -2)$

La ecuación general de la recta r es $x - y + 2 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|0 - (-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} =$$

$= 2\sqrt{2}$ unidades

b) Como las rectas son paralelas, el ángulo que forman es 0°

Ejercicio 4

Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un mínimo relativo en el punto $A(2, 8)$

Solución:

Si tiene un mínimo relativo en el punto $A(2, 8)$, tiene que pasar por él $f(2) = 8$

Si tiene un mínimo relativo en el punto $A(2, 8)$ entonces la 1.ª derivada para $x = 2$ vale cero.

$f'(2) = 0, f'(x) = 3x^2 + 2ax$

De ambas condiciones obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2^3 + a \cdot 2^2 + b &= 8 \\ 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 4a + b &= 0 \\ 12 + 4a &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

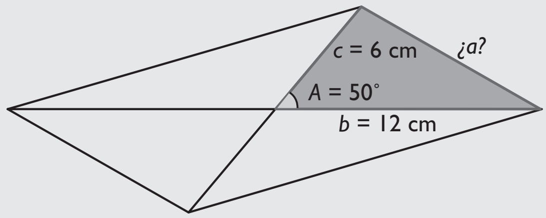
$a = -3, b = 12$

Ejercicio 5

Se tiene un paralelogramo cuyas diagonales miden 24 cm y 12 cm respectivamente, y forman un ángulo de 50°. Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.

Solución:

Consideramos el triángulo formado por dos medias diagonales y el lado correspondiente.



Para hallar el lado a aplicamos el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

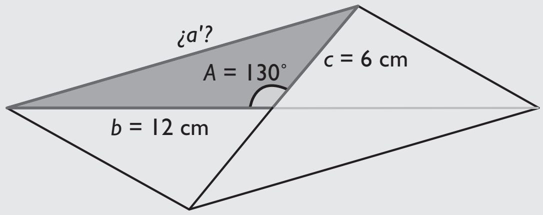
$a^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos 50°$

$a = 9,35$ cm

El área de este triángulo es:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \ \text{sen}\ 50° = 27,58 \text{ cm}^2$

Haciendo lo mismo con el otro triángulo:



$a'^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos 130°$

$a' = 16,51$ cm

El área de este triángulo es:

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \ \text{sen}\ 130° = 27,58 \text{ cm}^2$

El perímetro es:

$2(9,35 + 16,51) = 51,72$ cm

El área total será:

$2(A_1 + A_2) = 2(27,58 + 27,58) = 110,32 \text{ cm}^2$