Unidad 8.
Resolución de triángulos

1. Triángulos rectángulos

Explora

Calcula mentalmente la incógnita que se pide en los siguientes triángulos rectángulos:

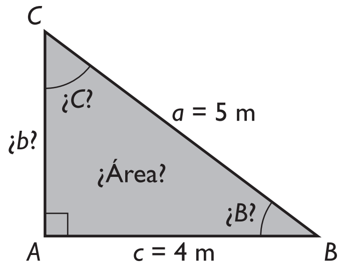
a) $b = 6$ m, $c = 8$ m; halla la hipotenusa a b) $B = 35°$; halla el otro ángulo agudo C

Solución:

a) $a = 10$ m b) $c = 55°$

Elabora

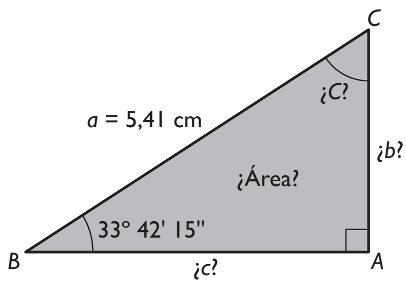
1 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa $a = 5$ m y un cateto $c = 4$ m. Calcula los demás elementos.



Solución:

Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5$ m $c = 4$ m	b	$b^2 = a^2 - c^2$	$b = 3$ m
	B	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos B = \frac{4}{5} \Rightarrow B = 36° 52' 12''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 53° 7' 48''$
	Área	Área $= \frac{1}{2} b \cdot c$	Área $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ m^2

2 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa $a = 5{,}41$ m y el ángulo $B = 33° 42' 15''$. Calcula los demás elementos.

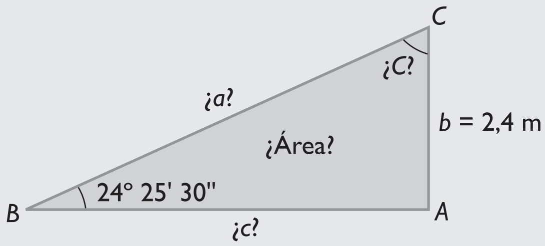


Solución:

Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5{,}41$ m $B = 33° 42' 15''$	C	$C = 90° - B$	$C = 90° - 33° 42' 15'' = 56° 17' 45''$
	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$	$b = 5{,}41 \text{ sen } 33° 42' 15'' = 3$ m
	c	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B$	$c = 5{,}41 \cos 33° 42' 15'' = 4{,}5$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 6{,}75 \text{ m}^2$

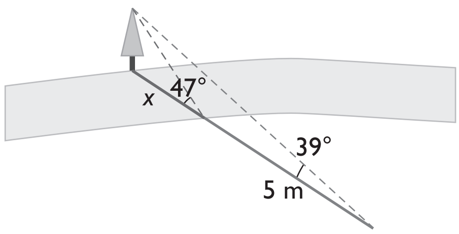
3 En un triángulo rectángulo se conoce la medida de un ángulo agudo $B = 24° 25' 30''$ y el cateto opuesto $b = 2{,}4$ m. Calcula los demás elementos.

Solución:

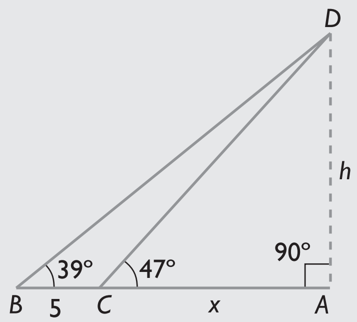


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 2{,}4$ m $B = 24° 25' 30''$	C	$C = 90° - B$	$C = 90° - 24° 25' 30'' = 65° 34' 30''$
	a	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen } B}$	$a = 5{,}8$ m
	c	$\text{tg } B = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\text{tg } B}$	$c = 5{,}28$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}28 = 6{,}34 \text{ m}^2$

4 Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtiene 47°. Alejándose 5 m del río, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 39°. Calcula la anchura del río.



Solución:



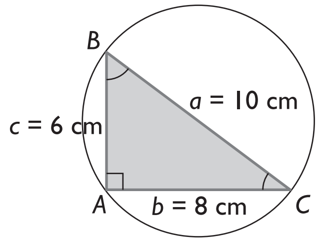
$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 47° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 39° = \dfrac{h}{5 + x} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 15{,}42 \text{ m}$$

2. Teorema de los senos

Explora

Observa el triángulo rectángulo del dibujo y calcula mentalmente el valor de *k*

$$k = \frac{a}{\text{sen } A}$$



Solución:
$k = 10$ cm

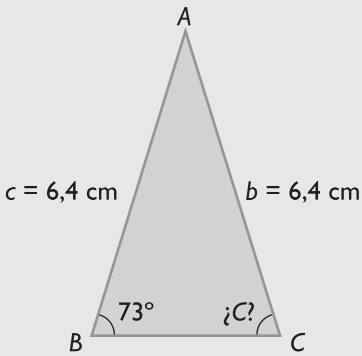
Elabora

5 En un triángulo se conocen:

$b = 6{,}4$ cm, $c = 6{,}4$ cm y $B = 73°$

Calcula mentalmente el ángulo *C*. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



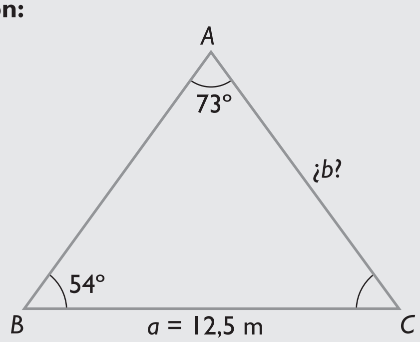
El triángulo es isósceles.
$C = 73°$. La solución es única.

6 En un triángulo se conocen:

$a = 12{,}5$ m, $A = 73°$ y $B = 54°$

Calcula el lado *b*. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$$\frac{12{,}5}{\text{sen } 73°} = \frac{b}{\text{sen } 54°} \Rightarrow b = \frac{12{,}5 \cdot \text{sen } 54°}{\text{sen } 73°} = 10{,}57 \text{ m}$$

Tiene una solución.

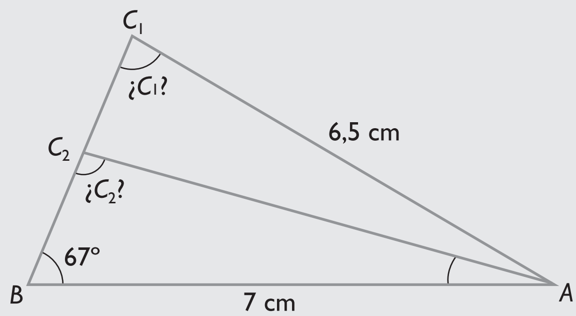
7 En un triángulo se conocen:

$b = 6{,}5$ cm, $c = 7$ cm y $B = 67°$

Calcula el ángulo *C*. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

Datos:



$$\frac{6{,}5}{\text{sen } 67°} = \frac{7}{\text{sen } C}$$

$$\text{sen } C = \frac{7 \cdot \text{sen } 67°}{6{,}5}$$

$C_1 = 82°\ 26'\ 32'' \Rightarrow B + C_1 < 180°$

$C_2 = 97°\ 33'\ 28'' \Rightarrow B + C_2 < 180°$

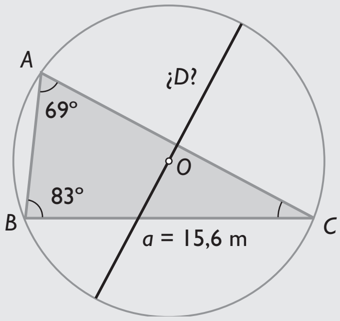
Tiene dos soluciones.

8 De un triángulo se conocen:

$a = 15{,}6$ m, $A = 69°$ y $B = 83°$

Halla la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita.

Solución:



$$D = \frac{15{,}6}{\text{sen } 69°} = 16{,}71 \text{ m}$$

9 En un triángulo se conocen:

$a = 5$ m, $b = 8$ m y $A = 72°$

Calcula el ángulo B. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

$$\frac{5}{\text{sen } 72°} = \frac{8}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{8 \cdot \text{sen } 72°}{5} = 1{,}52$$

No tiene solución porque sen $B = 1{,}52 > 1$

10 En un triángulo se conocen:

$b = 7{,}5$ cm, $A = 98°$ y $B = 87°$

Calcula el lado a. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

No hay solución porque:

$A + B = 98° + 87° = 185° > 180°$

3. Teorema del coseno y de la tangente

Explora

Un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo según que el cuadrado del lado mayor sea, respectivamente, menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Clasifica mentalmente los siguientes triángulos:

a) $a = 2$ m, $b = 3$ m, $c = 4$ m b) $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 5$ m c) $a = 4$ m, $b = 5$ m, $c = 6$ m

Solución:

a) $16 > 13 \Rightarrow$ Obtusángulo. b) $25 = 25 \Rightarrow$ Rectángulo. c) $36 < 41 \Rightarrow$ Acutángulo.

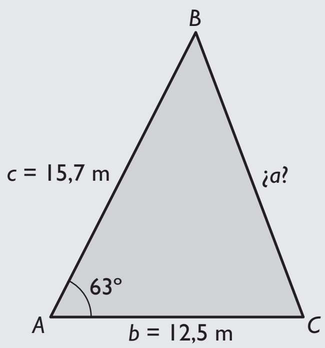
Elabora

11 En un triángulo se conocen:

$b = 12{,}5$ m, $c = 15{,}7$ m y $A = 63°$

Calcula el lado a

Solución:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$a^2 = 12{,}5^2 + 15{,}7^2 - 2 \cdot 12{,}5 \cdot 15{,}7 \cdot \cos 63°$

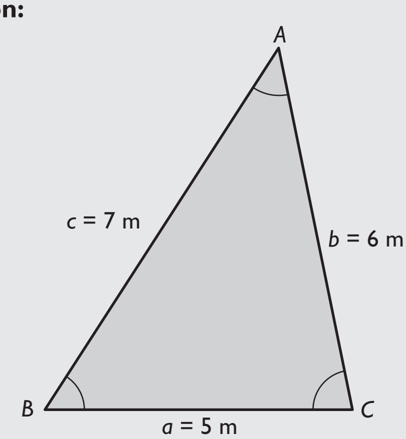
$a = 14{,}98$ m

12 En un triángulo se conocen los tres lados:

$a = 5$ m, $b = 6$ m y $c = 7$ m

Calcula el ángulo A

Solución:



$$\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = 0{,}7143$$

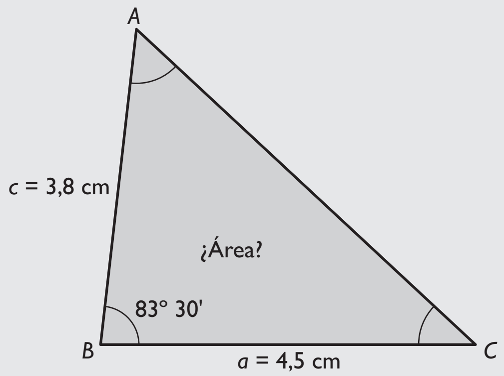
$A = 44°\ 24'\ 51''$

13 En un triángulo se conocen:

$$a = 4{,}5 \text{ cm}, \ c = 3{,}8 \text{ cm y } B = 83° \ 30'$$

Calcula su área.

Solución:



$\text{Área} = \dfrac{1}{2} 4{,}5 \cdot 3{,}8 \cdot \text{sen } 83° \ 30' = 8{,}5 \text{ cm}^2$

$\text{Área} = 8{,}5 \text{ cm}^2$

14 En un triángulo se conocen $a = 5{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm y $C = 60°$. Calcula los ángulos A y B

Solución:

$A + B + C = 180° \Rightarrow A + B = 180° - C = 180° - 60° = 120°$

Aplicando el teorema de la tangente se tiene:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\text{tg}\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow \frac{5{,}5+4{,}5}{5{,}5-4{,}5} = \frac{\text{tg}\dfrac{120°}{2}}{\text{tg}\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow$$

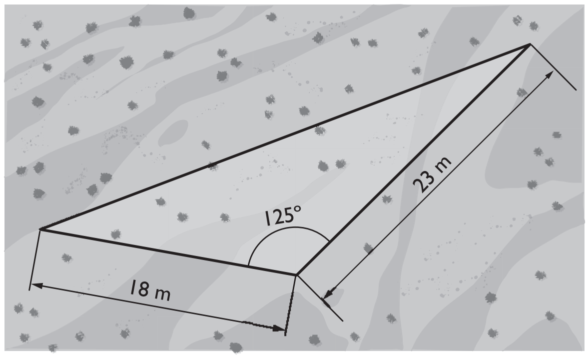
$$10 = \frac{\text{tg } 60°}{\text{tg}\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow \text{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\text{tg } 60°}{10} \Rightarrow \frac{A-B}{2} = 9° 49' 35''$$

$A - B = 19° 39' 10''$

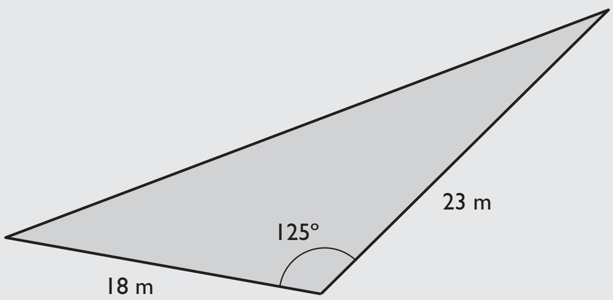
Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 120° \\ A - B = 19° 39' 10'' \end{array}\right\} \Rightarrow A = 69° \ 49' \ 35''; \ B = 50° \ 10' \ 25''$$

15 Un solar tiene forma de triángulo y se conocen dos lados, que miden 18 m y 23 m, y el ángulo que forman, que es de 125°. El metro cuadrado vale 30 €. Calcula el valor del solar.



Solución:



$\text{Área} = \dfrac{1}{2} 18 \cdot 23 \cdot \text{sen } 125° = 169{,}56 \text{ m}^2$

$\text{Área} = 169{,}56 \text{ m}^2$

Precio = 169,56 · 30 = 5 086,8 €

Precio = 5 086,8 €

4. Triángulos no rectángulos

Explora

En un triángulo cualquiera, se sabe que sen $A = 1/2$. Calcula mentalmente cuánto mide el ángulo A.

¿Cuántas soluciones puede tener, una o dos?

Solución:

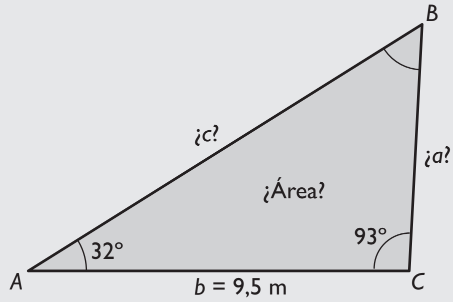
Tiene dos soluciones:

$A = 30°$ y $A = 150°$

Elabora

16 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 9,5$ m, $A = 32°$ y $C = 93°$

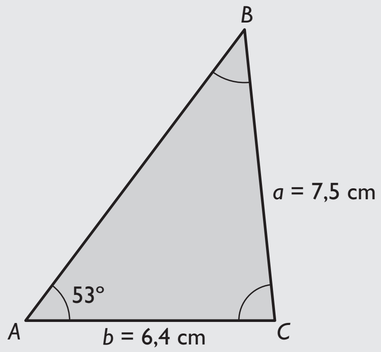
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 9,5$ m $A = 32°$ $C = 93°$	B	$B = 180° - (A + C)$	$B = 180° - (32° + 93°) = 55°$
	a	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B}$	$a = \frac{9,5 \cdot \text{sen } 32°}{\text{sen } 55°} = 6,15$ m
	c	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A}$	$c = \frac{6,15 \cdot \text{sen } 93°}{\text{sen } 32°} = 11,59$ m
	Área	Área $= \frac{1}{2} ab \text{ sen } C$	Área $= \frac{1}{2} \cdot 6,15 \cdot 9,5 \cdot \text{sen } 93° = 29,17 \text{ m}^2$

17 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 7,5$ cm, $b = 6,4$ cm y $A = 53°$

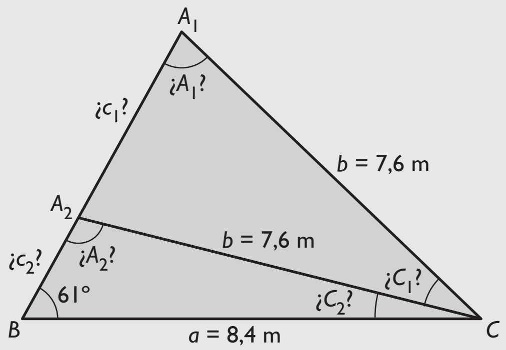
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7,5$ cm $b = 6,4$ cm $A = 53°$	B	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b \cdot \text{sen } A}{a}$	$\text{sen } B = \frac{6,4 \cdot \text{sen } 53°}{7,5} = B_1 = 42° 57' 40''$ Como el ángulo suplementario de B_1 tiene el mismo seno, puede existir un B_2 $B_2 = 180° - 42° 57' 40'' = 137° 2' 20''$ (No es válido)
	C	$C = 180° - (A + B)$	$C = 180° - (53° + 42° 57' 40'') = 84° 2' 20''$
	c	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A}$	$c = \frac{7,5 \cdot \text{sen } 84° 2' 20''}{\text{sen } 53°} = 9,34$ cm
	Área	Área $= \frac{1}{2} ab \text{ sen } C$	Área $= \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 6,4 \cdot \text{sen } 84° = 23,87 \text{ cm}^2$

18 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 8,4$ m, $b = 7,6$ m y $B = 61°$

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 8,4$ m $b = 7,6$ m $B = 61°$	A	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } A = \dfrac{a \cdot \text{sen } b}{b}$	$\text{sen } A = \dfrac{8,4 \cdot \text{sen } 61°}{7,6} = A_1 = 75°\ 10'\ 8''$
	C	$C = 180° - (A + B)$	Como el ángulo suplementario de A_1 tiene el mismo seno, puede existir un A_2 $A_2 = 180° - 75°\ 10'\ 8'' = 104°\ 49'\ 52''$ $C_1 = 180° - (75°\ 10'\ 8'' + 61°) = 43°\ 49'\ 52''$ $C_2 = 180° - (104°\ 49'\ 52'' + 61°) = 14°\ 10'\ 8''$
	c	$\dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \dfrac{b \cdot \text{sen } C}{\text{sen } B}$	$c_1 = \dfrac{7,6 \cdot \text{sen } 43°\ 49'\ 52''}{\text{sen } 61°} = 6,02$ m $c_2 = \dfrac{7,6 \cdot \text{sen } 14° 10'\ 8''}{\text{sen } 61°} = 2,13$ m
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$A_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 7,6 \cdot \text{sen } 43°\ 49'\ 52'' = 22,11\ m^2$ $A_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 7,6 \cdot \text{sen } 14°\ 10'\ 8'' = 7,81\ m^2$

19 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 7$ cm, $c = 5$ cm y $C = 65°$

Solución:

$$\frac{7}{\text{sen } A} = \frac{5}{\text{sen } 65°}$$

$$\text{sen } A = \frac{7 \cdot \text{sen } 65°}{5} = 1,27$$

No tiene solución.

5. Tercer y cuarto casos de resolución de triángulos

Explora

Clasifica los siguientes triángulos en posibles e imposibles. Razona la respuesta.

a) Triángulo 1: $a = 5$ m, $b = 7$ m, $c = 9$ m

b) Triángulo 2: $a = 5$ m, $b = 10$ m, $c = 20$ m

Solución:

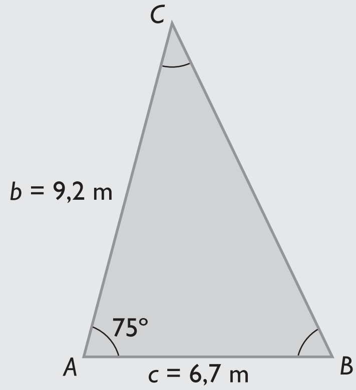
a) Es posible. $5 + 7 > 9$. La suma de los dos lados menores es superior al mayor.

b) Es imposible: $5 + 10 < 20$

Elabora

20 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 9{,}2$ m, $c = 6{,}7$ m y $A = 75°$

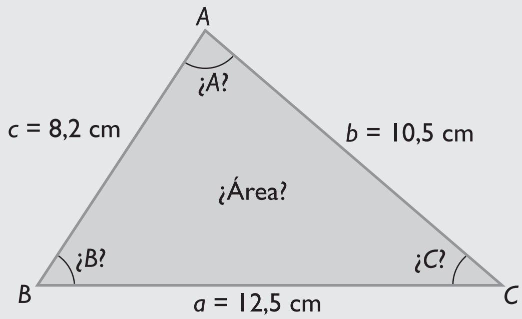
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 9{,}2$ m $c = 6{,}7$ m $A = 75°$	a	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$	$a = \sqrt{9{,}2^2 + 6{,}7^2 - 2 \cdot 9{,}2 \cdot 6{,}7 \cdot \cos 75°}$ $a = 9{,}88$ m
	C	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen } C = \dfrac{c \cdot \text{sen } A}{a}$	$\text{sen } C = \dfrac{6{,}7 \cdot \text{sen } 75°}{9{,}88} \Rightarrow C = 40° \, 55' \, 19''$
	B	$B = 180° - (A + C)$	$B = 180° - (75° + 40° \, 55' \, 19'')$ $B = 64° \, 4' \, 41''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} bc \text{ sen } A$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}2 \cdot 6{,}7 \cdot \text{sen } 75° = 29{,}77 \text{ m}^2$

21 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 12{,}5$ cm, $b = 10{,}5$ cm y $c = 8{,}2$ cm

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 12{,}5$ cm $b = 10{,}5$ cm $c = 8{,}2$ cm	A	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos A = \dfrac{10{,}5^2 + 8{,}2^2 - 12{,}5^2}{2 \cdot 10{,}5 \cdot 8{,}2}$ $A = 82° \, 54' \, 53''$
	B	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \dfrac{b \cdot \text{sen } A}{a}$	$\text{sen } B = \dfrac{10{,}5 \cdot \text{sen } 82° \, 54' \, 53''}{12{,}5}$ $B = 56° \, 28' \, 8''$
	C	$C = 180° - (A + B)$	$C = 180° - (82° \, 54' \, 53'' + 56° \, 28' \, 8'')$ $C = 40° \, 36' \, 59''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 12{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot \text{sen } 40° \, 36' \, 59''$ $\text{Área} = 42{,}72 \text{ cm}^2$

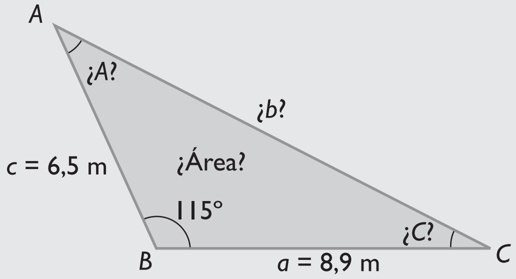
22 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 5,3$ cm, $b = 9,5$ cm y $c = 4,1$ cm

Solución:

No tiene solución porque $5,3 + 4,1 < 9,5$

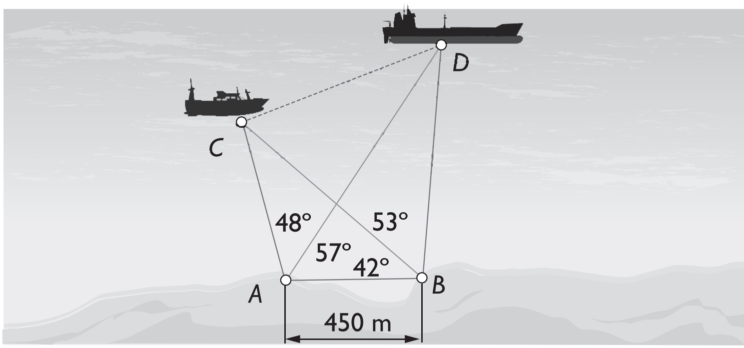
23 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 8,9$ m, $c = 6,5$ m y $B = 115°$

Solución:

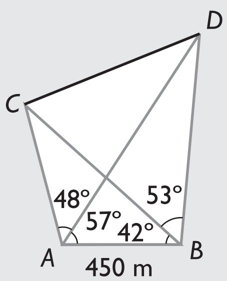


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 8,9$ m $c = 6,5$ m $B = 115°$	b	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$	$b = \sqrt{8,9^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 8,9 \cdot 6,5 \cdot \cos 115°}$ $b = 13,05$ m
	A	$\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b}$	$\operatorname{sen} A = \dfrac{8,9 \cdot \operatorname{sen} 115°}{13,05} \Rightarrow A = 38°\ 10'\ 38''$
	C	$C = 180° - (A + B)$	$C = 180° - (38°\ 10'\ 38'' + 115°)$ $C = 26°\ 49'\ 22''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2}ac\operatorname{sen} B$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 8,9 \cdot 6,5 \cdot \operatorname{sen} 115° = 26,21\ \text{m}^2$

24 Halla la distancia que hay entre dos barcos C y D, sabiendo que hemos medido la distancia que hay entre A y B y hemos obtenido 450 m, y que con el teodolito hemos obtenido que $CAD = 48°$, $BAD = 57°$, $ABC = 42°$ y $CBD = 53°$



Solución:



a) En el triángulo ABC se calcula AC

$ACB = 180° - (48° + 57° + 42°) = 33°$

$$\frac{450}{\operatorname{sen} 33°} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 42°} \Rightarrow AC = \frac{450 \cdot \operatorname{sen} 42°}{\operatorname{sen} 33°} = 553 \text{ m}$$

b) En el triángulo ABD se calcula AD

$ADB = 180° - (57° + 42° + 53°) = 28°$

$$\frac{450}{\operatorname{sen} 28°} = \frac{AD}{\operatorname{sen} 95°} \Rightarrow AD = \frac{450 \cdot \operatorname{sen} 95°}{\operatorname{sen} 28°} = 955 \text{ m}$$

c) En el triángulo ACD se calcula CD

$CD^2 = 553^2 + 955^2 - 2 \cdot 553 \cdot 955 \cdot \cos 48°$

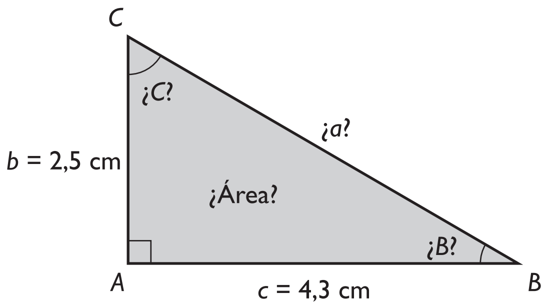
$CD = 715$ m

Actividades finales

Elabora actividades de las secciones

1. Triángulos rectángulos

25 En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos $b = 2,5$ cm y $c = 4,3$ cm. Calcula los demás elementos.

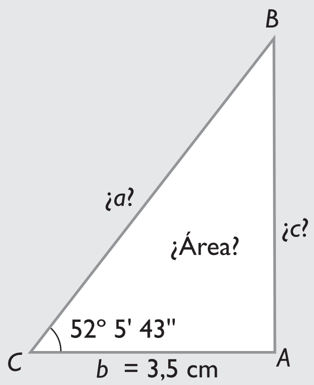


Solución:

Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 2,5$ cm $c = 4,3$ cm	a	$a^2 = b^2 + c^2$	$a = 4,97$ cm
	B	$\text{tg } B = \dfrac{b}{c}$	$\text{tg } B = \dfrac{2,5}{4,3} \Rightarrow B = 30° \ 10' \ 25''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 59° \ 49' \ 35''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4,3 = 5,38 \text{ cm}^2$

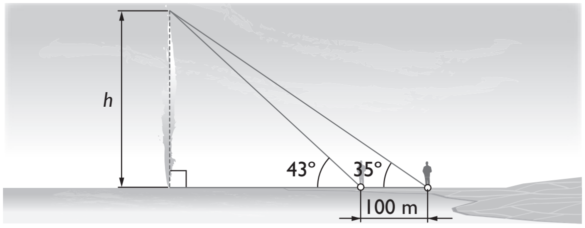
26 En un triángulo rectángulo se conocen un ángulo agudo, $C = 52° \ 5' \ 43''$, y el cateto contiguo, $b = 3,5$ cm. Calcula los demás elementos.

Solución:

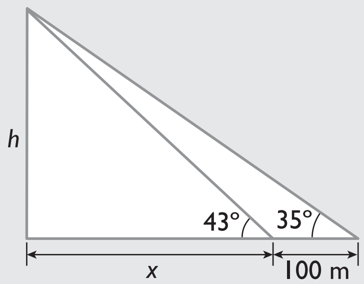


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 3,5$ cm $C = 52° \ 5' \ 43''$	B	$B = 90° - C$	$B = 90° - 52° \ 5' \ 43' = 37° \ 54' \ 17''$
	a	$\cos C = \dfrac{b}{a} \Rightarrow a = \dfrac{b}{\cos C}$	$a = \dfrac{3,5}{\cos 52° \ 5' \ 43''} = 5,7$ cm
	c	$\text{tg } C = \dfrac{c}{b} \Rightarrow c = b \text{ tg } C$	$c = 3,5 \cdot \text{tg } 52° \ 5' \ 43'' = 4,5$ cm
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} a \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 4,5 = 7,88 \text{ cm}^2$

27 En el centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua y se quiere medir su altura. Para ello se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtiene 43°; tras alejarse 100 m del lago, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 35°. Calcula la altura del chorro de agua.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 43° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 35° &= \frac{h}{100 + x} \end{aligned}\right\} h = 281{,}07$$

Altura = 281,07 m

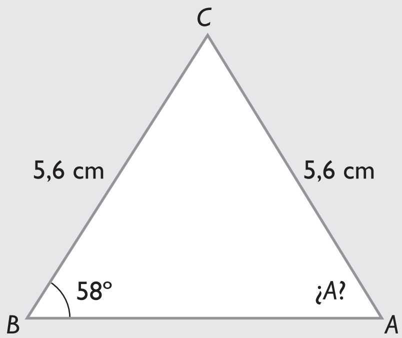
2. Teorema de los senos

28 En un triángulo se conocen:

$a = 5{,}6$ cm, $b = 5{,}6$ cm y $B = 58°$

Calcula mentalmente el ángulo A. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



El triángulo es isósceles.

$A = 58°$

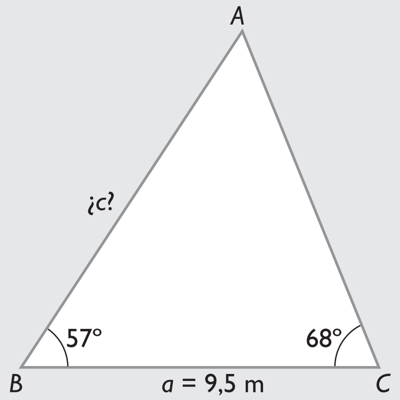
La solución es única.

29 En un triángulo se conocen:

$a = 9{,}5$ m, $B = 57°$ y $C = 68°$

Calcula el lado c. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$A = 180° - (57° + 68°) = 55°$

$$\frac{9{,}5}{\text{sen } 55°} = \frac{c}{\text{sen } 68°}$$

$$c = \frac{9{,}5 \cdot \text{sen } 68°}{\text{sen } 55°} = 10{,}75 \text{ m}$$

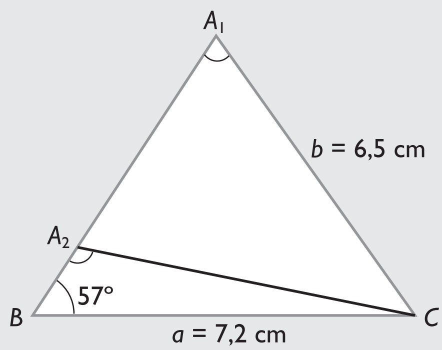
Hay una solución.

30 En un triángulo se conocen:

$a = 7{,}2$ cm, $b = 6{,}5$ cm y $B = 57°$

Calcula el ángulo A. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$$\frac{7{,}2}{\text{sen } A} = \frac{6{,}5}{\text{sen } 57°}$$

$$\text{sen } A = \frac{7{,}2 \cdot \text{sen } 57°}{6{,}5}$$

$A_1 = 68° \ 16' \ 40'' \Rightarrow A_1 + B < 180°$

$A_2 = 111° \ 43' \ 20'' \Rightarrow A_2 + B < 180°$

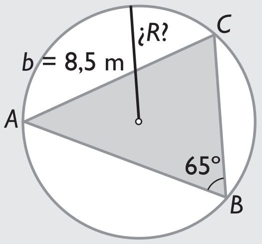
Tiene dos soluciones.

31 De un triángulo se conocen:

$$b = 8{,}5 \text{ m y } B = 65°$$

Halla la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

Solución:



$D = \dfrac{8{,}5}{\text{sen } 65°} = 9{,}38 \text{ m}$ $\quad R = \dfrac{9{,}38}{2} = 4{,}69 \text{ m}$

32 En un triángulo se conocen:

$$b = 7 \text{ cm}, c = 8{,}5 \text{ cm y } B = 92°$$

Calcula el ángulo C. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

$\dfrac{7}{\text{sen } 92°} = \dfrac{8{,}5}{\text{sen } C}$

$\text{sen } C = \dfrac{8{,}5 \cdot \text{sen } 92°}{7} = 1{,}21$

No tiene solución porque sen $C = 1{,}21 > 1$

33 En un triángulo se conocen:

$$c = 7{,}5 \text{ m}, B = 125° \text{ y } C = 73°$$

Calcula el lado b. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

$B + C = 125° + 73° = 198° > 180°$

No tiene solución.

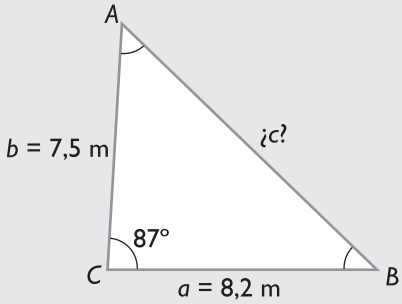
3. Teorema del coseno y de la tangente

34 En un triángulo se conocen:

$$a = 8{,}2 \text{ m}, b = 7{,}5 \text{ m y } C = 87°$$

Calcula el lado c

Solución:



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$c = \sqrt{8{,}2^2 + 7{,}5^2 - 2 \cdot 8{,}2 \cdot 7{,}5 \cdot \cos 87°}$

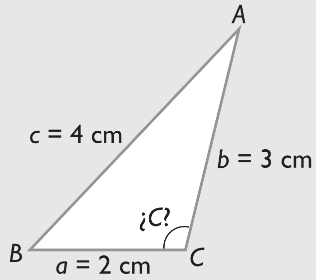
$c = 10{,}82 \text{ m}$

35 En un triángulo se conocen los tres lados:

$$a = 2 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm y } c = 4 \text{ cm}$$

Calcula el ángulo C

Solución:



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$\cos C = \dfrac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3}$

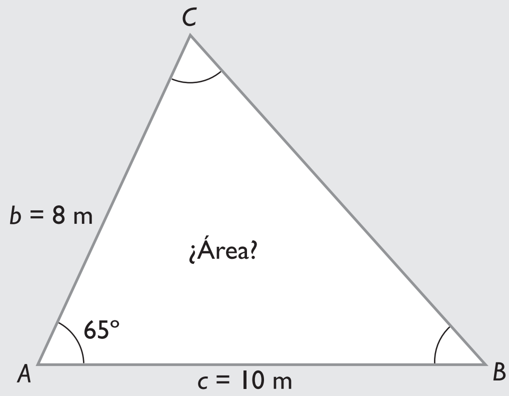
$C = 104° \, 28' \, 39''$

36 En un triángulo se conocen:

$$b = 8 \text{ m}, c = 10 \text{ m y } A = 65°$$

Calcula su área.

Solución:



$\text{Área} = \dfrac{1}{2} bc \text{ sen } A$

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{sen } 65° = 36{,}25 \text{ m}^2$

37 En un triángulo se conocen $a = 10$ cm, $b = 8$ cm y $C = 40°$. Calcula los ángulos A y B

Solución:

$A + B + C = 180° \Rightarrow A + B = 180° - C = 180° - 40° = 140°$

Aplicando el teorema de la tangente se tiene:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow \frac{10+8}{10-8} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{140°}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow$$

$$9 = \frac{\text{tg } 70°}{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow \text{tg}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\text{tg } 70°}{9} \Rightarrow \frac{A-B}{2} = 16° \, 58' \, 34''$$

$A - B = 33° \, 57' \, 8''$

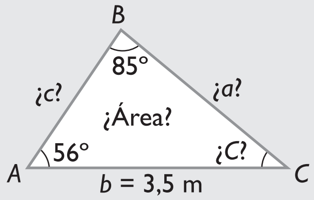
Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 140° \\ A - B = 33° \, 57' \, 8'' \end{array}\right\} \Rightarrow A = 86° \, 58' \, 34''; B = 53° \, 1' \, 26''$$

4. Triángulos no rectángulos

38 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 3{,}5$ m, $A = 56°$ y $B = 85°$

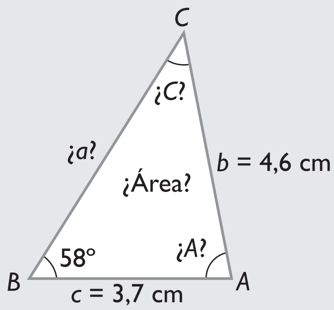
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 3{,}5$ m $A = 56°$ $B = 85°$	C	$C = 180° - (A + B)$	$C = 180° - (56° + 85°) = 39°$
	a	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow a = \dfrac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B}$	$a = \dfrac{3{,}5 \cdot \text{sen } 56°}{\text{sen } 85°} = 2{,}91$ cm
	c	$\dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \dfrac{b \cdot \text{sen } C}{\text{sen } B}$	$c = \dfrac{3{,}5 \cdot \text{sen } 39°}{\text{sen } 85°} = 2{,}21$ m
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 2{,}91 \cdot 3{,}5 \cdot \text{sen } 39° = 3{,}2 \text{ m}^2$

39 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 4{,}6$ cm, $c = 3{,}7$ cm y $B = 58°$

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 4{,}6$ cm $c = 3{,}7$ cm $B = 58°$	C	$\dfrac{c}{\text{sen } C} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } C = \dfrac{c \cdot \text{sen } B}{b}$	$\text{sen } C = \dfrac{3{,}7 \cdot \text{sen } 58°}{4{,}6} \Rightarrow C_1 = 43°\ 36''$ Como el ángulo suplementario de C_1 tiene el mismo seno, puede existir un C_2 $C_2 = 180° - 43°\ 36'' = 136°\ 59'\ 24''$ (No es válido)
	A	$A = 180° - (B + C)$	$A = 180° - (58° + 43°\ 36'') = 78°\ 59'\ 24''$
	a	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow a = \dfrac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B}$	$a = \dfrac{4{,}6 \cdot \text{sen } 78°\ 59'\ 24''}{\text{sen } 58°} = 5{,}32$ cm
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} ac \text{ sen } B$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 5{,}32 \cdot 3{,}7 \cdot \text{sen } 58° = 8{,}35 \text{ cm}^2$

40 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 5{,}2$ m, $c = 4{,}3$ m y $C = 73°$
¿Cuántas soluciones tiene?

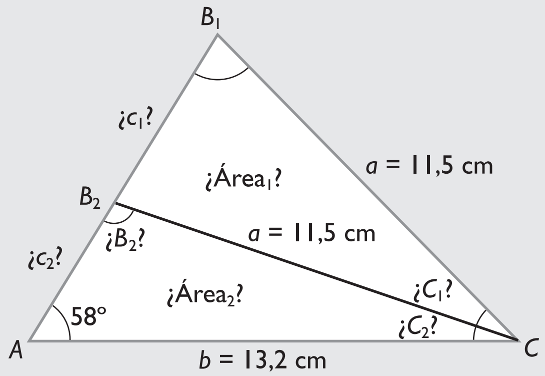
Solución:

$\frac{5{,}2}{\text{sen } B} = \frac{4{,}3}{\text{sen } 73°}$ $\quad$ $\text{sen } B = \frac{5{,}2 \cdot \text{sen } 73°}{4{,}3} = 1{,}16$

No tiene solución porque sen $B = 1{,}16 > 1$

41 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 11{,}5$ cm, $b = 13{,}2$ cm y $A = 58°$

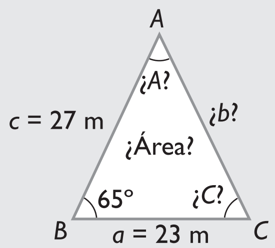
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 11{,}5$ cm $b = 13{,}2$ cm $A = 58°$	B	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b \cdot \text{sen } A}{a}$	$\text{sen } B = \frac{13{,}2 \cdot \text{sen } 58°}{11{,}5} \Rightarrow B_1 = 76°\ 45'\ 29''$ Como el ángulo suplementario de B_1 tiene el mismo seno, puede existir un B_2 $B_2 = 180° - 76°\ 45'\ 29'' = 103°\ 14'\ 31''$
	C	$C = 180° - (A + B)$	$C_1 = 180° - (58° + 76°\ 45'\ 29'') = 45°\ 14'\ 31''$ $C_2 = 180° - (58° + 103°\ 14'\ 31'') = 18°\ 45'\ 29''$
	c	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A}$	$c_1 = \frac{11{,}5 \cdot \text{sen } 45° 14'\ 31''}{\text{sen } 58°} = 9{,}63$ cm $c_2 = \frac{11{,}5 \cdot \text{sen } 18°\ 45'\ 29''}{\text{sen } 58°} = 4{,}36$ cm
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 11{,}5 \cdot 13{,}2 \cdot \text{sen } 45°\ 14'\ 31'' = 53{,}9 \text{ cm}^2$ $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 11{,}5 \cdot 13{,}2 \cdot \text{sen } 18°\ 45'\ 29'' = 24{,}41 \text{ cm}^2$

5. Tercer y cuarto casos de resolución de triángulos

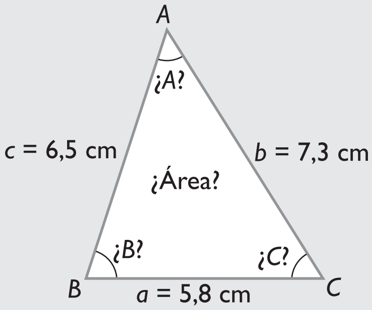
42 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 23$ m, $c = 27$ m y $B = 65°$



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 23$ m $c = 27$ m $B = 65°$	b	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$	$b = \sqrt{23^2 + 27^2 - 2 \cdot 23 \cdot 27 \cdot \cos 65°}$ $b = 27{,}08$ m
	A	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } A = \dfrac{a \cdot \text{sen } B}{b}$	$\text{sen } A = \dfrac{23 \cdot \text{sen } 65°}{27{,}08} \Rightarrow A = 50°\ 19'\ 56''$
	C	$C = 180° - (A + B)$	$C = 180° - (50°\ 19'\ 56'' + 65°)$ $C = 64°\ 40'\ 4''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} ac \text{ sen } B$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 23 \cdot 27 \cdot \text{sen } 65° = 281{,}41 \text{ m}^2$

43 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 5{,}8$ cm, $b = 7{,}3$ cm y $c = 6{,}5$ cm

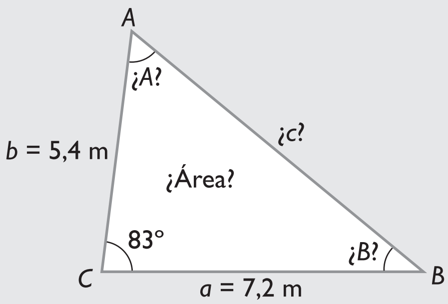
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5{,}8$ cm $b = 7{,}3$ cm $c = 6{,}5$ cm	A	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos A = \dfrac{7{,}3^2 + 6{,}5^2 - 5{,}8^2}{2 \cdot 7{,}3 \cdot 6{,}5}$ $A = 49°\ 17'\ 15''$
	B	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \dfrac{b \cdot \text{sen } A}{a}$	$\text{sen } B = \dfrac{7{,}3 \cdot \text{sen } 49° 17'\ 15''}{5{,}8}$ $B = 72°\ 33'\ 31''$
	C	$C = 180° - (A + B)$	$C = 180° - (49°\ 17'\ 15'' + 72°\ 33'\ 31'')$ $C = 58°\ 9'\ 14''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 5{,}8 \cdot 7{,}3 \cdot \text{sen } 58°\ 9'\ 14''$ $\text{Área} = 17{,}98 \text{ cm}^2$

44 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 7{,}2$ m, $b = 5{,}4$ m y $C = 83°$

Solución:



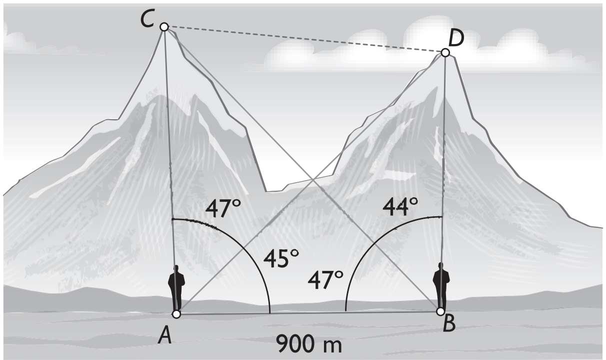
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7{,}2$ m $b = 5{,}4$ m $C = 83°$	c	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$	$c = \sqrt{7{,}2^2 + 5{,}4^2 - 2 \cdot 7{,}2 \cdot 5{,}4 \cdot \cos 83°}$ $c = 8{,}46$ m
	A	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen } A = \dfrac{a \cdot \text{sen } C}{c}$	$\text{sen } A = \dfrac{7{,}2 \cdot \text{sen } 83°}{8{,}46} \Rightarrow A = 57°\ 38'\ 31''$
	B	$C = 180° - (A + C)$	$B = 180° - (57°\ 38'\ 31'' + 83°)$ $B = 39°\ 21'\ 29''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2}\, ab \text{ sen } C$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 7{,}2 \cdot 5{,}4 \cdot \text{sen } 83° = 19{,}3 \text{ m}^2$

45 Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 47$ cm, $b = 52$ cm y $c = 99$ cm. ¿Cuántas soluciones tiene?

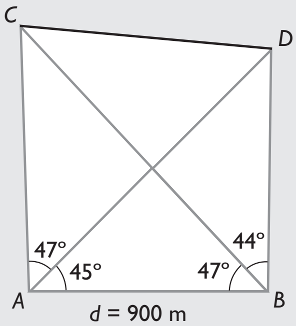
Solución:

No tiene solución porque 47 + 52 = 99

46 Halla la distancia que hay entre los picos de dos montañas C y D, sabiendo que se ha medido en una llanura cercana la distancia que hay entre A y B y se ha obtenido 900 m, y que con el teodolito se ha obtenido que $CAD = 47°$, $BAD = 45°$, $ABC = 47°$ y $CBD = 44°$



Solución:



a) En el triángulo ABC se calcula AC

$ACB = 180° - (47° + 45° + 47°) = 41°$

$$\frac{900}{\text{sen } 41°} = \frac{AC}{\text{sen } 47°} \Rightarrow AC = \frac{900 \cdot \text{sen } 47°}{\text{sen } 41°} = 1\,003 \text{ m}$$

b) En el triángulo ABD se calcula AD

$ADB = 180° - (45° + 47° + 44°) = 44°$

$$\frac{900}{\text{sen } 44°} = \frac{AD}{\text{sen } 91°} \Rightarrow AD = \frac{900 \cdot \text{sen } 91°}{\text{sen } 44°} = 1\,295 \text{ m}$$

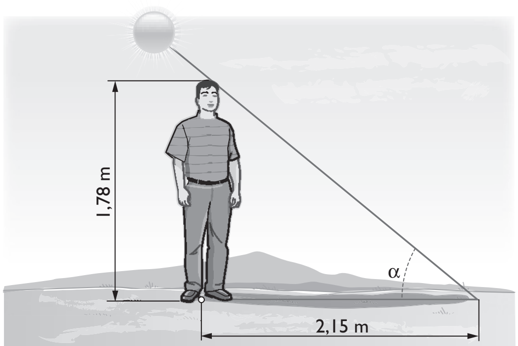
c) En el triángulo ACD se calcula CD

$CD^2 = 1\,003^2 + 1\,295^2 - 2 \cdot 1\,003 \cdot 1\,295 \cdot \cos 47°$

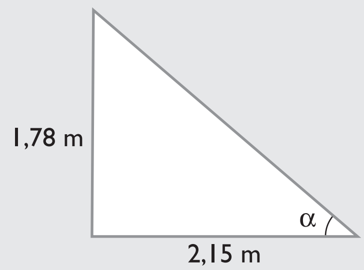
$CD = 955$ m

Elabora actividades para reforzar

47 Una persona que mide 1,78 m proyecta una sombra de 2,15 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?



Solución:



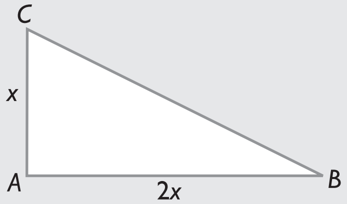
Ángulo de elevación = α

$$\text{tg } \alpha = \frac{1{,}78}{2{,}15}$$

$\alpha = 39°\ 37'\ 18''$

48 En un triángulo rectángulo, un cateto mide el doble que el otro. Calcula la amplitud de sus ángulos agudos.

Solución:

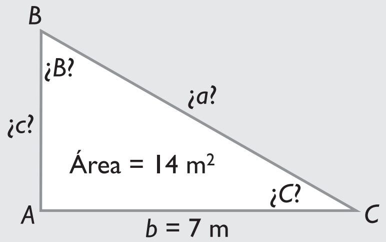


$\text{tg } B = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = 26° \, 33' \, 54''$

$C = 63° \, 26' \, 6''$

49 En un triángulo rectángulo, un cateto mide 7 m, y el área, 14 m². Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.

Solución:



$A = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c$

$14 = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot c$

$c = 4$ m

$\text{tg } B = \dfrac{7}{4}$

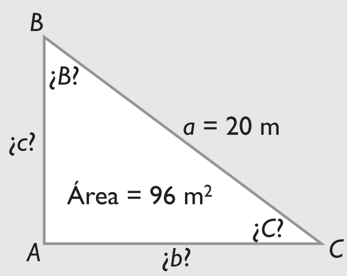
$B = 60° \, 15' \, 18''$

$C = 29° \, 44' \, 42''$

$a = \sqrt{7^2 + 4^2} = 8{,}06$ m

50 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 20 m, y el área, 96 m². Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} b \cdot c = 96 \\ b^2 + c^2 = 20^2 \end{array}\right\}$$

se obtiene:

$b = 16$ m, $c = 12$ m

$\text{tg } B = \dfrac{16}{12}$

$B = 53° \, 7' \, 48''$

$C = 36° \, 52' \, 12''$

51 Calcula mentalmente el radio de una circunferencia circunscrita a un triángulo en el que un lado mide 7 m, y el ángulo opuesto, 30°

Solución:

$D = \dfrac{7}{\text{sen } 30°} = 7 : \dfrac{1}{2} = 7 \cdot 2 = 14$ m

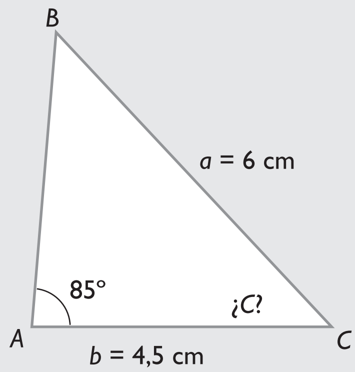
$\text{Radio} = \dfrac{14}{2} = 7$ m

52 En un triángulo se conocen:

$a = 6$ cm, $b = 4{,}5$ cm y $A = 85°$

Calcula el ángulo C. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$\dfrac{6}{\text{sen } 85°} = \dfrac{4{,}5}{\text{sen } B}$

$\text{sen } B = \dfrac{4{,}5 \cdot \text{sen } 85°}{6}$

$B_1 = 48° \, 20' \, 38''$

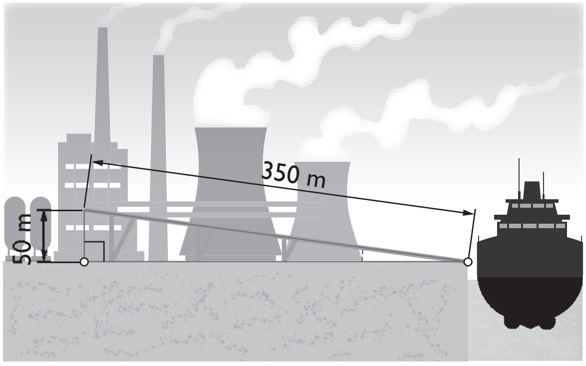
$B_2 = 131° \, 39' \, 22''$ (No es válido)

$C = 46° \, 39' \, 22''$

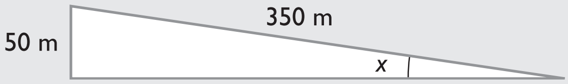
Tiene una solución.

Elabora problemas

53 Una cinta transportadora de carbón llega desde un puerto de mar hasta una central térmica; si la cinta mide 350 m y se quiere que eleve el carbón a 50 m de altura, ¿qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?



Solución:



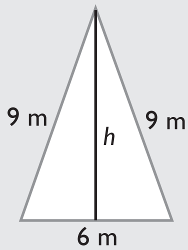
Ángulo de elevación = x

$\text{sen } x = \dfrac{50}{350}$

$x = 8° \ 12' \ 48''$

54 Dado un triángulo isósceles en que los lados iguales miden 9 m y el desigual 6 m, calcula la altura relativa al lado desigual.

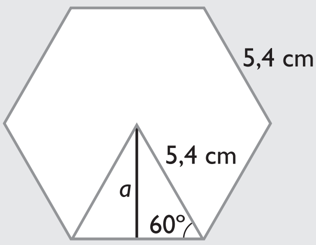
Solución:



Altura = $h = \sqrt{9^2 - 3^2} = 8{,}49$ m

55 Calcula la apotema y el área de un hexágono regular cuyo lado mide 5,4 cm

Solución:



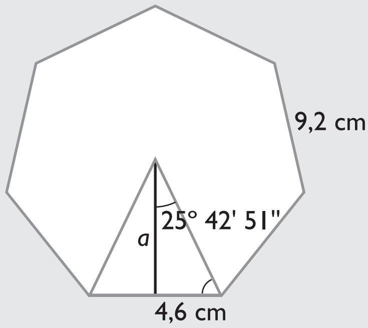
$\text{sen } 60° = \dfrac{a}{5{,}4}$

$a = 5{,}4 \text{ sen } 60° = 4{,}68$ cm

$\text{Área} = \dfrac{6 \cdot 5{,}4 \cdot 4{,}68}{2} = 75{,}82 \text{ cm}^2$

56 Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide 9,2 cm

Solución:

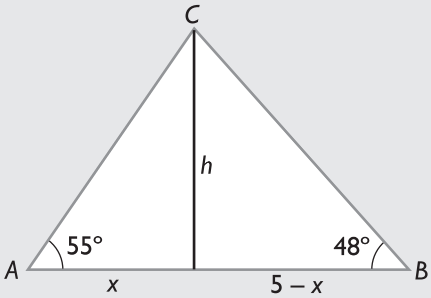


$\text{tg } 25° \ 42' \ 51'' = \dfrac{4{,}6}{a} \Rightarrow a = \dfrac{4{,}6}{\text{tg } 25° \ 42' \ 51''} = 9{,}55$ cm

$\text{Área} = \dfrac{7 \cdot 9{,}2 \cdot 9{,}55}{2} = 307{,}51 \text{ cm}^2$

57 Dos personas están en una playa y ven un globo desde los puntos A y B, de forma que las dos personas y el globo están en un plano perpendicular al suelo. La distancia entre las dos personas es de 5 km, el ángulo de elevación del globo desde el punto A es de 55°, y desde el punto B, de 48°. Calcula la altura a la que se encuentra el globo.

Solución:



Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 55° &= \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 48° &= \dfrac{h}{(5 - x)} \end{aligned}\right\}$$

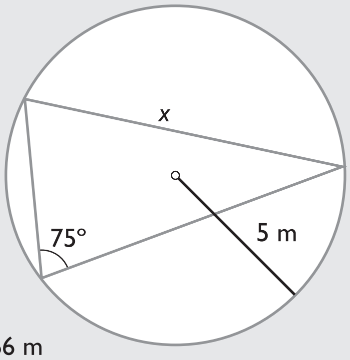
se obtiene:

$x = 2{,}187$ km

$h = 3{,}124$ km

58 Un ángulo de un triángulo mide de amplitud 75° y el radio de la circunferencia circunscrita mide 5 m. Halla la medida del lado opuesto al ángulo dado.

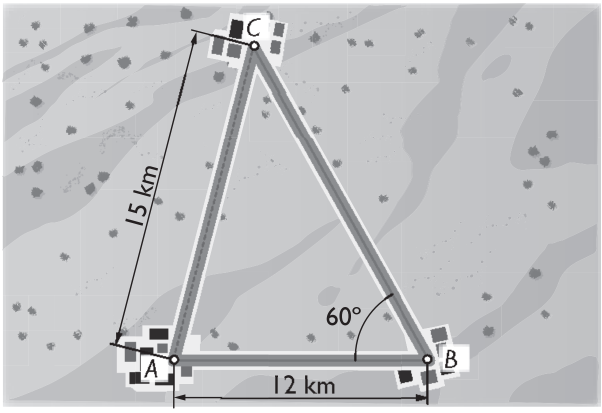
Solución:



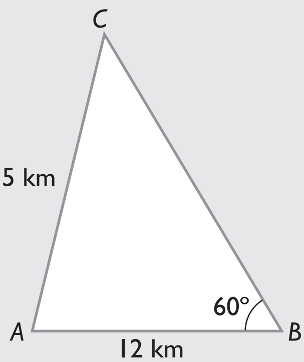
$$\frac{x}{\text{sen } 75°} = 2R$$

$x = 10 \cdot \text{sen } 75° = 9{,}66$ m

59 Tres pueblos *A*, *B* y *C* están unidos por carreteras rectas que forman un triángulo; la distancia de *A* hasta *B* es de 12 km, de *A* hasta *C* de 15 km y el ángulo *ABC* mide 60°. Calcula la distancia del pueblo *B* al *C*



Solución:



$$\frac{15}{\text{sen } 60°} = \frac{12}{\text{sen } C}$$

$$\text{sen } C = \frac{12 \cdot \text{sen } 60°}{15} \Rightarrow C = 43°\ 51'\ 14''$$

$A = 180° - (60° + 43°\ 51'\ 14'') = 76°\ 8'\ 46''$

$$\frac{BC}{\text{sen } 76°\ 8'\ 46''} = \frac{15}{\text{sen } 60°}$$

$$BC = \frac{15 \cdot \text{sen } 76°\ 8'\ 46''}{\text{sen } 60°} = 16{,}82 \text{ km}$$

60 Tres pueblos *A*, *B* y *C* están formando un triángulo. Si la distancia *AB* = 25 km, distancia *AC* = 43 km y el ángulo que se forma en *A* es de 75°, ¿cuál es la distancia que hay entre los pueblos *C* y *B*?

Solución:

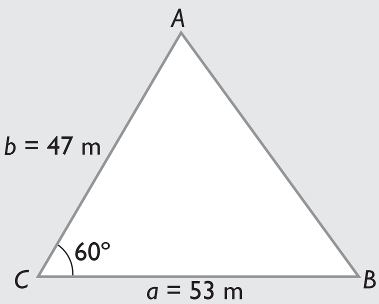
$CB = \sqrt{25^2 + 43^2 - 2 \cdot 25 \cdot 43 \cdot \cos 75°} = 43{,}79$ km

61 Un solar tiene forma de triángulo, del que se conocen:

$a = 53$ m, $b = 47$ m y $C = 60°$

Calcula el área del solar.

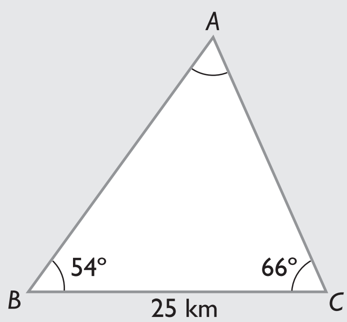
Solución:



$$\text{Área} = \frac{1}{2}\, 53 \cdot 47 \cdot \text{sen } 60° = 1\,078{,}63 \text{ m}^2$$

62 Una señal de socorro de un teléfono móvil *A* se escucha desde dos antenas *B* y *C* separadas entre sí 25 km, el ángulo *B* mide 54° y el ángulo *C* mide 66°. Calcula las distancias que hay desde cada una de las antenas *B* y *C* al teléfono móvil.

Solución:

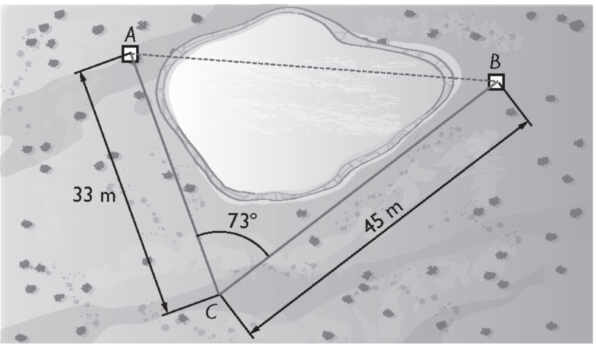


$A = 180° - (54° + 66°) = 60°$

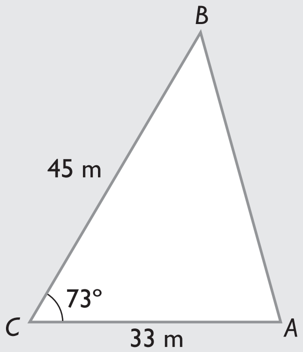
$$\frac{AB}{\text{sen } 66°} = \frac{25}{\text{sen } 60°} \Rightarrow AB = \frac{25 \cdot \text{sen } 66°}{\text{sen } 60°} = 26{,}372 \text{ km}$$

$$\frac{AC}{\text{sen } 54°} = \frac{25}{\text{sen } 60°} \Rightarrow AC = \frac{25 \cdot \text{sen } 54°}{\text{sen } 60°} = 23{,}354 \text{ km}$$

63 Dos torres de alta tensión A y B se encuentran separadas por un lago. Se toma un punto auxiliar C y se miden las distancias $AC = 33$ m, $BC = 45$ m y el ángulo $C = 73°$. Halla la distancia que hay entre dichas torres.



Solución:

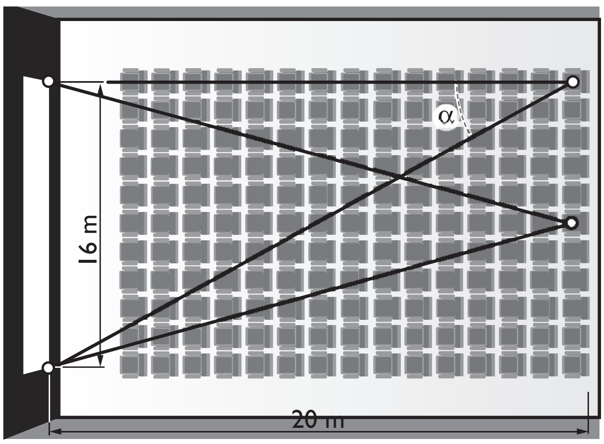


$$AB = \sqrt{33^2 + 45^2 - 2 \cdot 33 \cdot 45 \cdot \cos 73°} = 47{,}39 \text{ m}$$

64 La pantalla de un cine ocupa una longitud de 16 m. Si la fila 15 está situada a 20 m de la pantalla, halla el ángulo bajo el que ve un espectador la pantalla y di en qué lugar tendrá mejor visión si está colocado en:

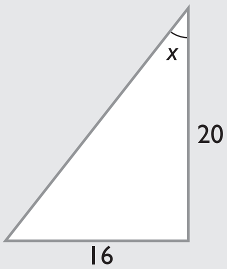
a) Una butaca totalmente lateral.

b) Una butaca totalmente centrada.

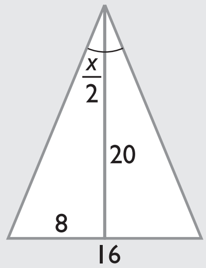


Solución:

a)



b)



a) $\text{tg } x = \dfrac{16}{20} \Rightarrow x = 38° \; 39' \; 35''$

b) $\text{tg } \dfrac{x}{2} = \dfrac{8}{20} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 21° \; 48' \; 5'' \Rightarrow x = 43° \; 36' \; 10''$

Se ve mejor en una butaca centrada porque el ángulo es mayor.

65 Un topógrafo mide dos lados de un campo triangular y obtiene 130 m y 110 m con un ángulo comprendido de 80°. ¿Cuánto miden los otros ángulos del triángulo?

Solución:

$A + B + C = 180° \Rightarrow A + B = 180° - C = 180° - 80° = 100°$

Aplicando el teorema de la tangente se tiene:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\text{tg}\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow \frac{130+110}{130-110} = \frac{\text{tg}\dfrac{100°}{2}}{\text{tg}\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow$$

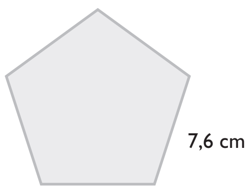
$$12 = \frac{\text{tg } 50°}{\text{tg}\dfrac{A-B}{2}} \Rightarrow \text{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\text{tg } 50°}{12} \Rightarrow \frac{A-B}{2} = 5° \; 40' \; 18''$$

$A - B = 11° 20' 36''$

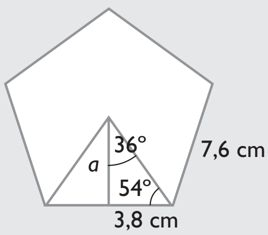
Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 100° \\ A - B = 11° \; 20' \; 36'' \end{array}\right\} \Rightarrow A = 55° \; 40' \; 18''; \; B = 44° \; 19' \; 42''$$

66 Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado mide 7,6 cm



Solución:

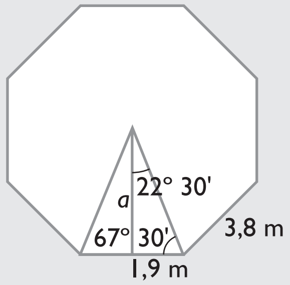


$$\text{tg } 54° = \frac{a}{3{,}8} \Rightarrow a = 3{,}8 \cdot \text{tg } 54° = 5{,}23 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 7{,}6 \cdot 5{,}23}{2} = 99{,}37 \text{ cm}^2$$

67 Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 3,8 m

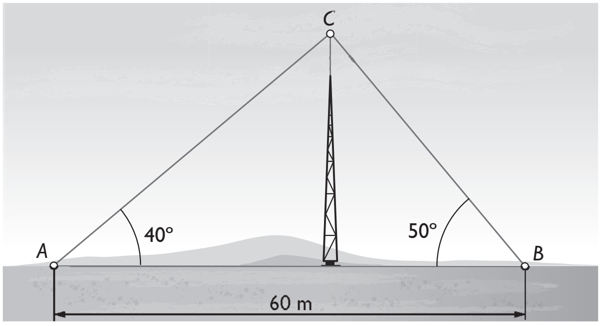
Solución:



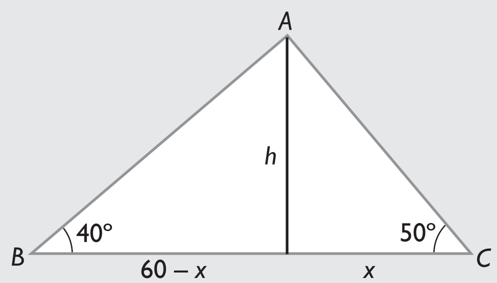
$\text{tg } 67° \ 30' = \dfrac{a}{1{,}9} \Rightarrow a = 1{,}9 \cdot \text{tg } 67° \ 30' = 4{,}59 \text{ m}$

$\text{Área} = \dfrac{8 \cdot 3{,}8 \cdot 4{,}59}{2} = 69{,}77 \text{ m}^2$

68 Una antena de radio está sujeta por dos cables que van desde la parte más alta al suelo. Los puntos de sujeción de los cables y el pie de la antena están alineados. Se han medido los ángulos que forma la horizontal con cada uno de los cables y son 40° y 50°. Sabiendo que la distancia entre los pies de los cables es de 60 m, calcula la altura de la antena.



Solución:



Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 40° = \dfrac{h}{60 - x} \\ \text{tg } 50° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\}$$

se obtiene:

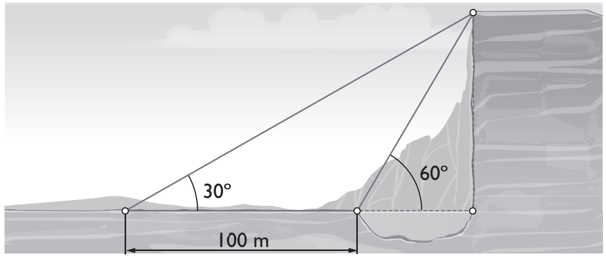
$x = 24{,}8$ m

$h = 29{,}5$ m

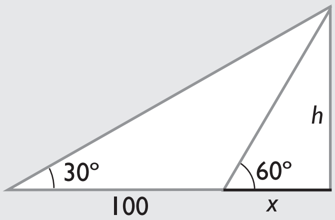
Elabora problemas de más nivel

69 En una llanura hay una montaña cortada verticalmente en una orilla de un río. Desde la otra orilla se ve el punto más alto de la montaña bajo un ángulo de 60°. Alejándose del río perpendicularmente 100 m, el ángulo de elevación mide 30°. Calcula:

a) La anchura del río. b) La altura de la montaña.



Solución:



Resolviendo el sistema:

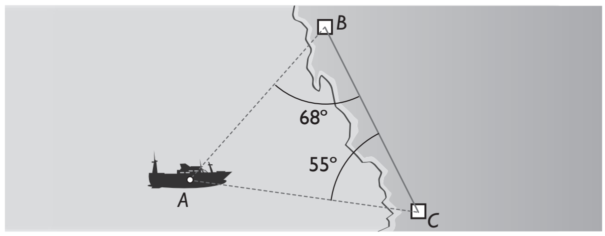
$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 60° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30° = \dfrac{h}{100 + x} \end{array}\right\}$$

se obtiene:

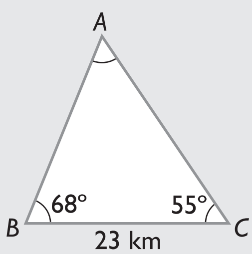
$x = 50$ m

$h = 86{,}6$ m

70 Un barco A emite una señal de socorro que se recibe en dos estaciones de radio B y C. Se conocen las medidas de los ángulos $ABC = 68°$, $ACB = 55°$ y la distancia entre las estaciones de radio, que es de 23 km. Calcula la distancia que hay desde el barco a cada una de las estaciones de radio.



Solución:

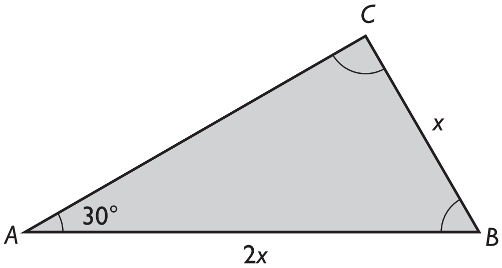


El ángulo $A = 180° - (68° + 55°) = 57°$

$\dfrac{AC}{\text{sen } 68°} = \dfrac{23}{\text{sen } 57°} \Rightarrow AC = \dfrac{23 \cdot \text{sen } 68°}{\text{sen } 57°} = 25{,}427 \text{ km}$

$\dfrac{AB}{\text{sen } 55°} = \dfrac{23}{\text{sen } 57°} \Rightarrow AB = \dfrac{23 \cdot \text{sen } 55°}{\text{sen } 57°} = 22{,}465 \text{ km}$

71 En un triángulo uno de los lados es el doble de otro y el ángulo opuesto a este lado menor mide 30°. Calcula cuánto mide cada uno de los otros ángulos.



Solución:

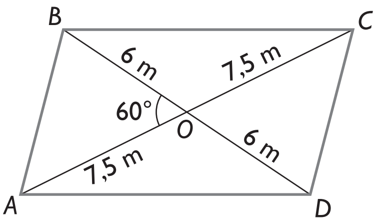
$\dfrac{x}{\text{sen } 30°} = \dfrac{2x}{\text{sen } C}$

sen C = 2 sen 30° = 1

C = 90°

B = 60°

72 Las diagonales de un romboide miden 15 m y 12 m y forman un ángulo de 60°. Calcula cuánto miden los lados.



Solución:

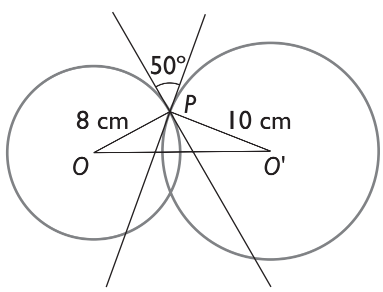
Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AOB

$AB = \sqrt{7{,}5^2 + 6^2 - 2 \cdot 7{,}5 \cdot 6 \cdot \cos 60°} = 6{,}87$ m

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AOD

$AD = \sqrt{7{,}5^2 + 6^2 - 2 \cdot 7{,}5 \cdot 6 \cdot \cos 120°} = 11{,}72$ m

73 Dos circunferencias, cuyos radios son de 8 cm y 10 cm, se cortan. El ángulo que forman las tangentes respectivas en el punto de intersección mide 50°. Halla la distancia entre los dos centros de las circunferencias.



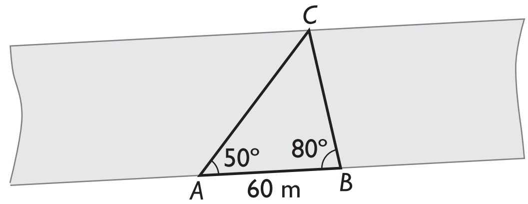
Solución:

OPO' = 180° – 50° = 130°

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo OPO'

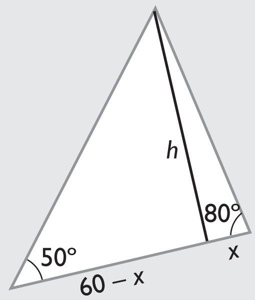
$OO' = \sqrt{8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 130°} = 16{,}34$ cm

74 Sobre una de las orillas paralelas de un río se han tomado dos puntos, A y B, a 60 m de distancia entre sí. Desde estos puntos se ha mirado un objeto, C, sobre la otra orilla. Las visuales desde los puntos A y B a C forman con la línea AB unos ángulos de 50° y 80°, respectivamente. Calcula la anchura del río.



Solución:

Resolviendo el sistema:



tg 80° = $\dfrac{h}{x}$

tg 50° = $\dfrac{h}{60 - x}$

se obtiene:

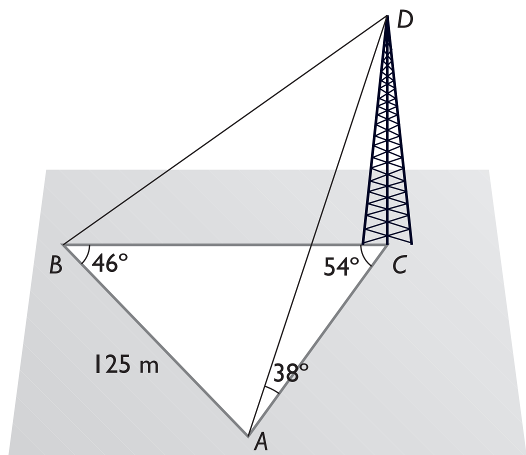
x = 10,42 m

h = 59,09 m

75 Se desea hallar desde el punto A la distancia a una torre y su altura. Por imposibilidad de medir la base sobre el plano vertical que pasa por A y D se han tomado las siguientes medidas:

- La longitud AB = 125 m en el plano horizontal.
- El ángulo de elevación desde A hasta D es de 38°
- En el triángulo ABC, el ángulo B = 46°
- El ángulo ACB = 54°

Halla la distancia AC y la altura CD.



Solución:

En el triángulo ABC:

A = 180° – (46° + 54°) = 80°

$\dfrac{AC}{\text{sen } 46°} = \dfrac{125}{\text{sen } 54°} \Rightarrow AC = \dfrac{125 \cdot \text{sen } 46°}{\text{sen } 54°} = 111{,}14$ m

tg 38° = $\dfrac{CD}{111{,}14} \Rightarrow CD = 111{,}14 \cdot \text{tg } 38° = 86{,}83$ m