Unidad 6.
Representación de funciones y problemas

1. Representación de funciones polinómicas

Explora

Calcula mentalmente: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x)$

Solución:
a) $+\infty$ b) $-\infty$

Elabora

Representa las siguientes funciones polinómicas completando el formulario de los diez apartados:

1 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

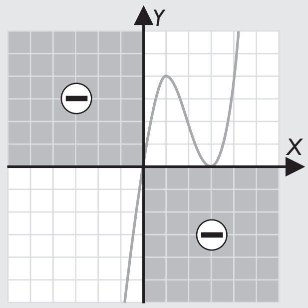
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(3, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, 3) \cup (3, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $B(1, 4)$
   - Mínimo relativo: $A(3, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(1, 3)$
9. Puntos de inflexión: $D(2, 2)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(2, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:

    $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2 $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$y' = -3x^2 - 6x$

$y'' = -6x - 6$

$y''' = -6$

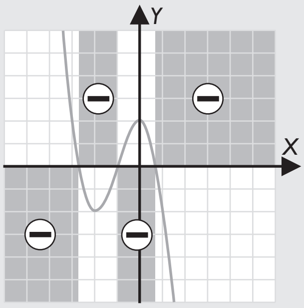
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(-\sqrt{3}-1, 0\right)$, $B(-1, 0)$, $C\left(\sqrt{3}-1, 0\right)$
   - Eje Y: $D(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\infty, -\sqrt{3}-1\right) \cup \left(-1, \sqrt{3}-1\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\sqrt{3}-1, -1\right) \cup \left(\sqrt{3}-1, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(0, 2)$
   - Mínimo relativo: $E(-2, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2, 0)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $F(-1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3 $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$y' = 4x^3 - 6x^2$

$y'' = 12x^2 - 12x$

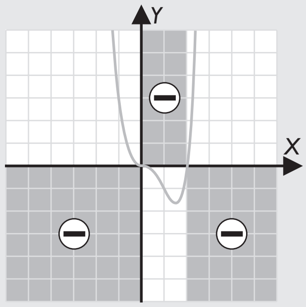
$y''' = 24x - 12$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
   - Decreciente (↘): $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$, $C(1, -1)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(0, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \left[-\frac{27}{16}, +\infty\right)$

4 $y = -x^4 + 2x^2$

Solución:

$y' = -4x^3 + 4x$

$y'' = -12x^2 + 4$

$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $O(0, 0)$, $B\left(\sqrt{2}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

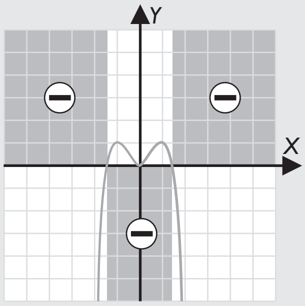
   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: $C(-1, 1)$, $D(1, 1)$
   b) Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}\right)$, $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}\right)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$



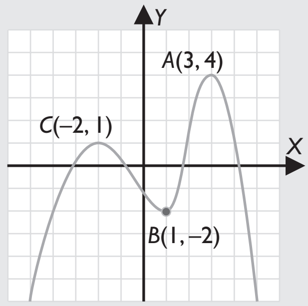
10. Recorrido o imagen:
$\text{Im}(f) = (-\infty, 1]$

5 De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(3, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -2)$, otro máximo relativo en el punto $C(-2, 1)$, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Solución:



2. Representación de funciones racionales

Explora

Calcula mentalmente:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x}$ b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x}$

Solución:
a) $+\infty$ b) $-\infty$

Elabora

Representa las siguientes funciones racionales completando el formulario de los diez apartados.

6 $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

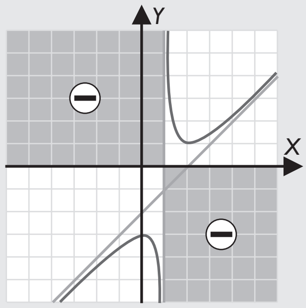
$$y''' = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x - 2$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -3)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -3)$
   - Mínimo relativo: $B(2, 1)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, 2)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   • Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

7 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

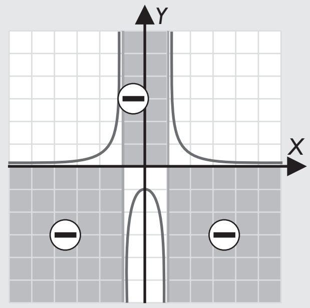
$y' = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$y'' = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

$y''' = -\dfrac{24x^3+24x}{(x^2-1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$ y $x = -1$, donde tiene discontinuidades de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   • Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   • Horizontales: $y = 0$
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: no lo corta.
   • Eje Y: $A(0, -1)$
   Signo:
   • Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   • Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: $A(0, -1)$
   • Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   • Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   • Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

8 $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$y'' = \dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$

$y''' = -\dfrac{12(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

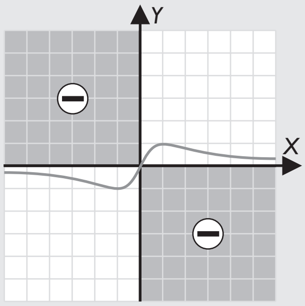
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar ⇒ simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   • Verticales: no tiene.
   • Horizontales: $y = 0$
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: $O(0, 0)$
   • Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   • Positiva (+): $(0, +\infty)$
   • Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: $A(1, 1)$
   • Mínimo relativo: $B(-1, -1)$
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(-1, 1)$
   • Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $C\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O(0, 0)$, $D\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Curvatura:

• Convexa (∪): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

• Cóncava (∩): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$



10. Recorrido o imagen:
$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$

9 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

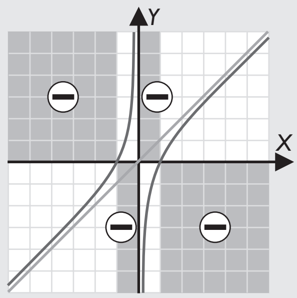
Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar ⇒ Simétrica respecto del eje origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   • Verticales: $x = 0$
   • Horizontales: no tiene.
   • Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
   • Eje Y: no lo corta.
   Signo:
   • Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   • Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: no tiene.
   • Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   • Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   • Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



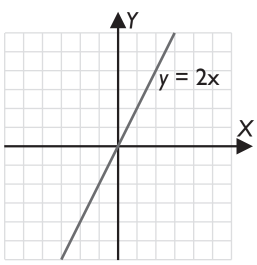
10. Recorrido o imagen:
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Funciones con condiciones

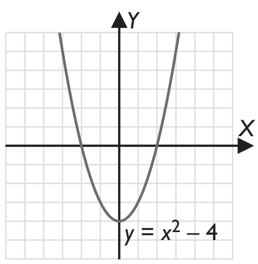
Explora

Halla y representa la función derivada de cada una de las siguientes funciones polinómicas. ¿Qué relación hay entre el grado de cada una de ellas y el de su derivada?

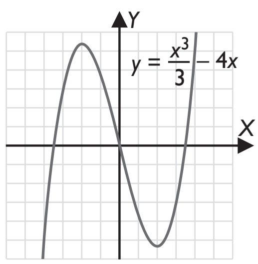
a)



b)

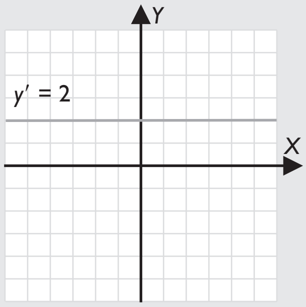


c)

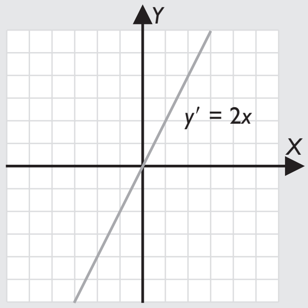


Solución:

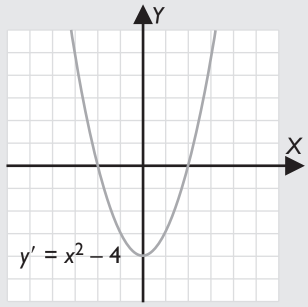
a)



b)



c)



La función derivada de una función polinómica es otra función polinómica de un grado menor.

Elabora

10 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$$

tenga un mínimo relativo en el punto $P(1, -4)$

Solución:

Pasa por $P(1, -4)$

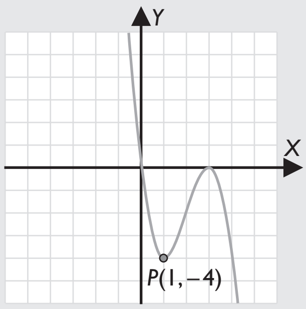
$y = -x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow -1 + a + b = -4$

Por ser $P(1, -4)$ un mínimo: $y'(1) = 0$

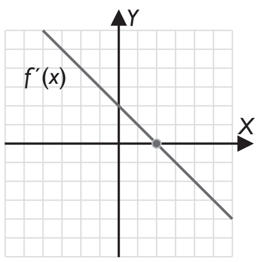
$y' = -3x^2 + 2ax + b \Rightarrow -3 + 2a + b = 0$

Resolviendo el sistema: $a = 6$, $b = -9$

$y = -x^3 + 6x^2 - 9x$



11 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia la monotonía.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = 3$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

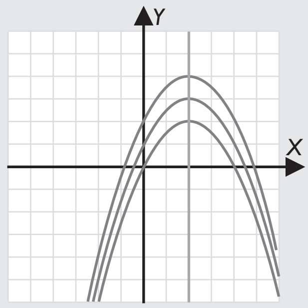
a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, 2)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(2, +\infty)$

b) $f'(3) = -1$

c) Tiene un máximo relativo en $x = 2$

d)



12 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto $P(1, -1)$

Solución:

Pasa por $P(1, -1)$

$y = ax^4 + bx^3 \Rightarrow a + b = -1$

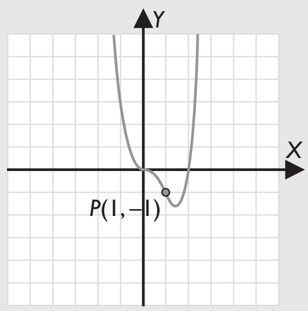
Por ser $P(1, -1)$ un punto de inflexión: $y''(1) = 0$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2$

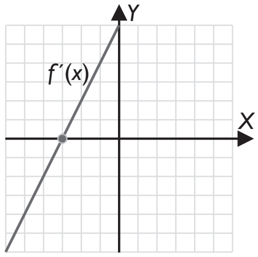
$y'' = 12ax^2 + 6bx \Rightarrow 12a + 6b = 0$

Resolviendo el sistema: $a = 1$, $b = -2$

$y = x^4 - 2x^3$



13 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia la monotonía.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = -2$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

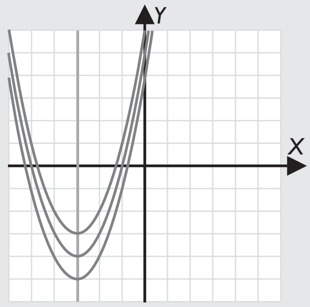
a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-3, +\infty)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(-\infty, -3)$

b) $f'(-2) = 2$

c) Tiene un mínimo relativo en $x = -3$

d)



4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

Explora

En una ciudad hay una epidemia de gripe, y la función que define el número de enfermos es:

$$f(x) = 125 + 20x - x^2$$

donde x se mide en días, e y, en miles de personas. Calcula mentalmente cuántos enfermos de gripe hay el día en que se detecta la epidemia, es decir, en el momento $x = 0$

Solución:

125 000 personas.

Elabora

14 Un movimiento está definido por la función:

$$e(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$$

donde t se mide en segundos, y e, en metros.

Calcula:

a) El espacio recorrido al cabo de 5 s

b) La velocidad.

c) La velocidad al cabo de 5 s

d) La aceleración.

e) La aceleración al cabo de 5 s

Solución:

a) $e(5) = 48$ m

b) $v(t) = e'(t) = 3t^2 - 6t - 1$

c) $v(5) = 44$ m/s

d) $a(t) = v'(t) = e''(t) = 6t - 6$

e) $a(5) = 24$ m/s^2

15 La resistencia de una viga, en función del peso que soporta, viene dada por $R(x) = 3x - x^2$, donde x se mide en toneladas.

Calcula el peso máximo que soporta.

Solución:

$R'(x) = 3 - 2x$

$R'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$R''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo.

$x = 1\,500$ kg es el máximo peso soportado.

16 Los beneficios de una empresa, en función del número de piezas producidas, vienen dados por:

$$B(x) = -3x^4 + 28x^3 - 84x^2 + 96x - 25$$

donde x se mide en miles de piezas. Calcula el número de piezas que tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

Solución:

$B'(x) = -12x^3 + 84x^2 - 168x + 96$

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2, x = 4$

$B''(x) = -36x^2 + 168x - 168$

Máximos relativos: $A(1, 12)$, $B(4, 39)$

Mínimo relativo: $C(2, 7)$

El mayor máximo relativo se obtiene en 4 000 unidades.

17 La concentración en la sangre de un medicamento puesto mediante una inyección intravenosa viene dado por:

$$C(t) = 4 - \frac{t^2}{16}$$

donde t es el número de horas que transcurren desde que se inyecta el medicamento en la sangre.

Calcula la velocidad de la concentración.

Solución:

$C' = -\frac{t}{8}$

5. Problemas de optimización

Explora

Un rectángulo tiene 12 m de perímetro; luego la base más la altura es 6 m. Copia y completa la siguiente tabla:

Base = *b*	0	1	2	3	4	5	6
Altura = *a*	6						
Superficie							

Calcula las dimensiones del rectángulo que tiene mayor superficie.

Solución:

Base = *b*	0	1	2	3	4	5	6
Altura = *a*	6	5	4	3	2	1	0
Superficie	0	5	8	9	8	5	0

El rectángulo de mayor superficie es un cuadrado de lado $b = a = 3$ m (recuerda que un cuadrado es un caso particular de un rectángulo.)

Elabora

18 Calcula dos números cuya suma sea 60 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = primer número.

y = segundo número.

$x + y = 60$

b) Función que hay que minimizar.

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$

Sujeto a: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$

$f(x) = x^2 + 2(60 - x)^2$

$f(x) = 3x^2 - 240x + 7200$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 6x - 240$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$

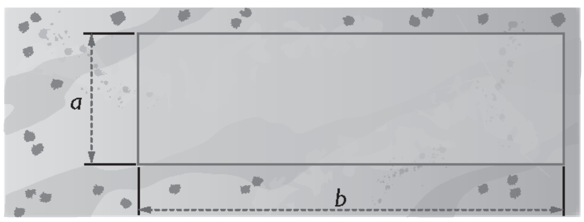
Si $x = 40 \Rightarrow y = 20$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

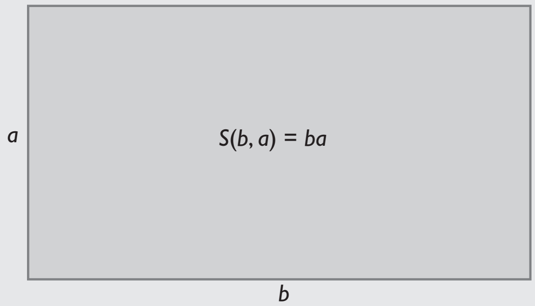
El primer número es $x = 40$, y el segundo, $y = 20$

19 Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1 600 m de cerca, ¿cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo:



b = longitud de la base.

a = altura.

Perímetro = 1600 m

b) Función que hay que maximizar.

$S(b, a) = ba$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 1600 m

$b + a = 800$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$S(b, a) = ba$

$b + a = 800$

$a = 800 - b$

$S(b) = b(800 - b)$

$S(b) = 800b - b^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$S'(b) = 800 - 2b$

$S'(b) = 0 \Rightarrow b = 400$

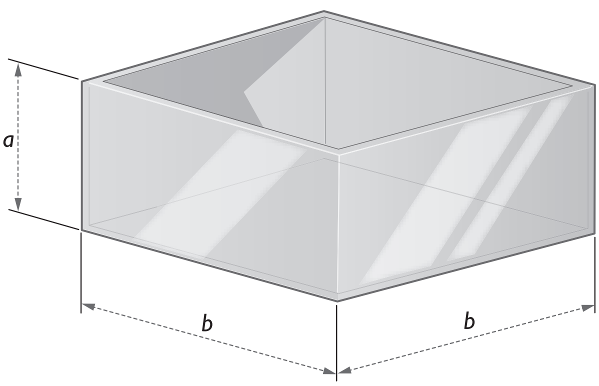
Si $b = 400 \Rightarrow a = 400$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$S''(b) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El recinto es un cuadrado que mide 400 m de lado.

20 Se quiere construir un recipiente en forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m^2, ¿qué dimensiones debe tener la caja?



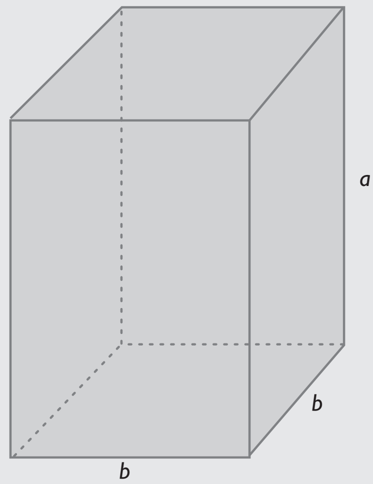
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

b = longitud de la base.

a = altura.

Superficie = 24 m^2



b) Función que hay que maximizar.

$V(b, a) = b^2a$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 24 m^2

$4ba + 2b^2 = 24$

$2ba + b^2 = 12$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$V(b, a) = b^2a$

$2ba + b^2 = 12$

$$a = \frac{12 - b^2}{2b}$$

$$V(b) = \frac{b(12 - b^2)}{2}$$

$$V(b) = \frac{1}{2}(12b - b^3)$$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$$V'(b) = \frac{1}{2}(12 - 3b^2)$$

$V'(b) = 0 \Rightarrow b = -2$ y $b = 2$

(La solución negativa no tiene sentido).

Si $b = 2 \Rightarrow a = 2$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(b) = -3b$

$V''(2) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) La caja es un cubo de arista 2 m y tendrá un volumen de 8 m^3

Elabora actividades de las secciones

1. Representación de funciones polinómicas

21 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^3}{6} - 2x$$

Solución:

$y' = \frac{x^2}{2} - 2$

$y'' = x$

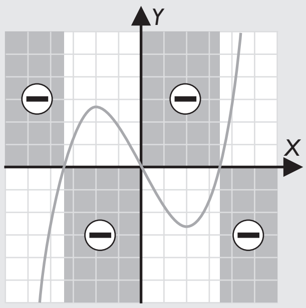
$y''' = 1$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$, $B\left(2\sqrt{3}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-2\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(0, 2\sqrt{3}\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C\left(-2, \frac{8}{3}\right)$
   - Mínimo relativo: $D\left(2, -\frac{8}{3}\right)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-2, 2)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

22 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 3$

$y'' = -6x$

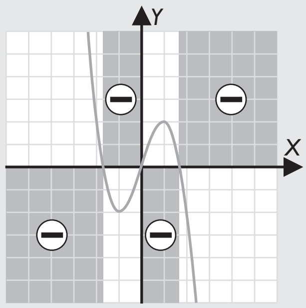
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $B\left(\sqrt{3}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(1, 2)$
   - Mínimo relativo: $D(-1, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-1, 1)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

23 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - 4x^2$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

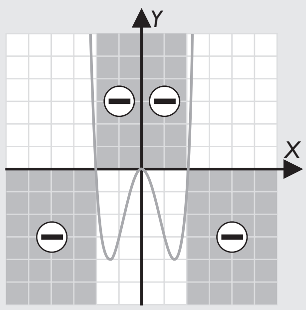
$y''' = 24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $C\left(-\sqrt{2}, -4\right)$, $D\left(\sqrt{2}, -4\right)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$
   - Decreciente (↘): $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$
9. Puntos de inflexión: $E\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$, $F\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$
   - Cóncava (∩): $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

24 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^4 + 6x^2 - 5$$

Solución:

$y' = -4x^3 + 12x$

$y'' = -12x^2 + 12$

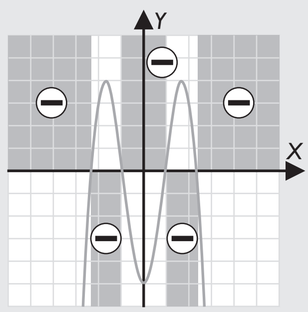
$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(-\sqrt{5}, 0\right)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D\left(\sqrt{5}, 0\right)$
   - Eje Y: $E(0, -5)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\sqrt{5}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{5}\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup (-1, 1) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $F\left(-\sqrt{3}, 4\right)$, $G\left(\sqrt{3}, 4\right)$
   - Mínimo relativo: $E(0, -5)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
   - Decreciente (↘): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
9. Puntos de inflexión: $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

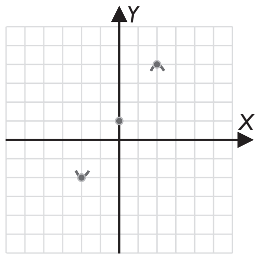


10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

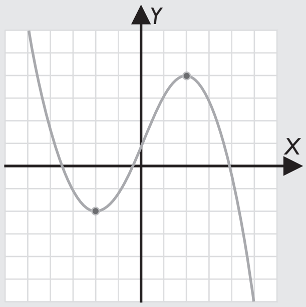
25 De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(2, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(-2, -2)$, un punto de inflexión en el punto $C(0, 1)$ y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno la gráfica a mano alzada.



Solución:



2. Representación de funciones racionales

26 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x}$$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$

$y'' = \dfrac{4}{x^3}$

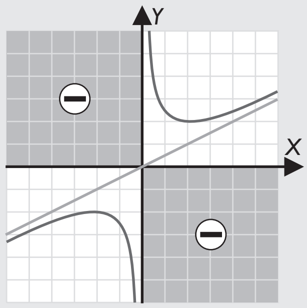
$y''' = -\dfrac{12}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = \dfrac{x}{2}$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-2, -2)$
   - Mínimo relativo: $B(2, 2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

27 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{4}{(x - 1)^3}$

$y''' = -\dfrac{12}{(x - 1)^4}$

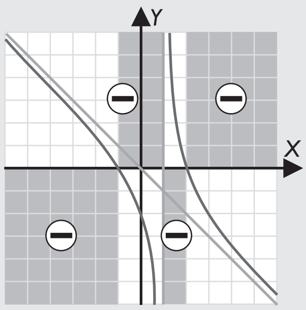
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$
   - Negativa (–): $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\varnothing$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



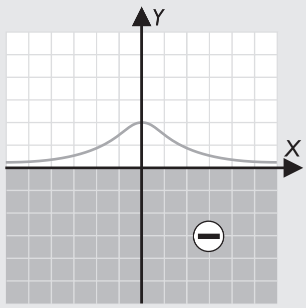
10. Recorrido o imagen:
    $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, 2)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B\left(-1, \dfrac{3}{2}\right), C\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $\mathrm{Im}(f) = (0, 2]$

28 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Solución:

$$y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{36x^2 - 36}{(x^2 + 3)^3}$$

$$y''' = \frac{-144x^3 + 432x}{(x^3 + 3)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

29 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

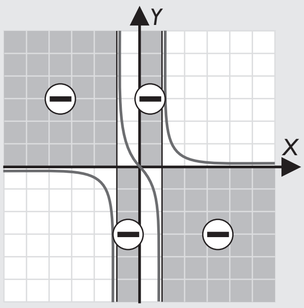
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y $x = 1$, donde tiene discontinuidades de primera especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$ y $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $\varnothing$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Funciones con condiciones

30 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función siguiente tenga un máximo relativo en el punto $P(3, 4)$: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 5$

Solución:

Pasa por $P(3, 4) \Rightarrow 27a + 9b - 5 = 4$

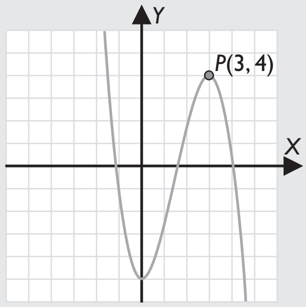
$y' = 3ax^2 + 2bx$

Máximo en $(3, 4) \Rightarrow y'(3) = 0 \Rightarrow 27a + 6b = 0$

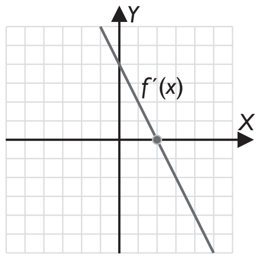
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = -\dfrac{2}{3}, b = 3$

$y = -\dfrac{2x^3}{3} + 3x^2 - 5$



31 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Calcula para $f(x)$:

a) La monotonía.

b) La pendiente de la recta tangente para $x = 1$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

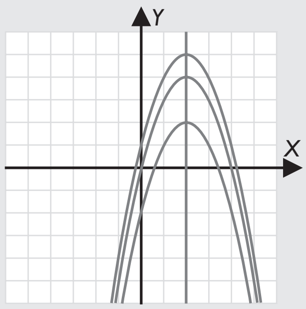
a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, 2)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(2, +\infty)$

b) $f'(1) = 2$

c) Tiene un máximo relativo en $x = 2$

d)



32 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función siguiente tenga un máximo relativo en el punto $P(1, 1)$: $f(x) = ax^4 + bx^3 - bx^2$

Solución:

Pasa por $P(1, 1) \Rightarrow a + b - b = 1 \Rightarrow a = 1$

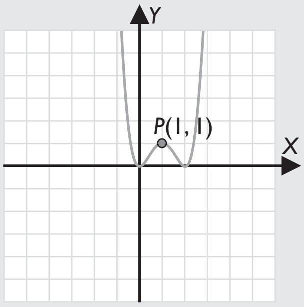
$y' = 4ax^3 + 3bx^2 - 2bx$

Máximo en $(1, 1) \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 3b - 2b = 0$

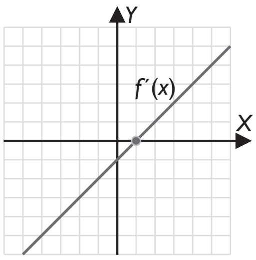
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = 1, b = -4$

$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$



33 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Calcula para $f(x)$:

a) La monotonía.

b) La pendiente de la recta tangente para $x = 4$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

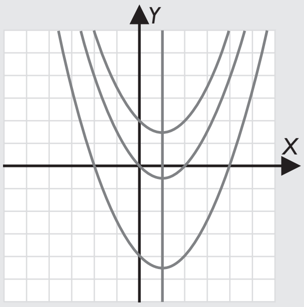
a) La función $f(x)$ es creciente en: $(1, +\infty)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(-\infty, 1)$

b) $f'(4) = 3$

c) Tiene un mínimo relativo en $x = 1$

d)



4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

34 Un movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.) es:

$$e(t) = 2t - 4$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 5 segundos.

b) Calcula la velocidad.

c) Representa en los mismos ejes coordenados el espacio y la velocidad.

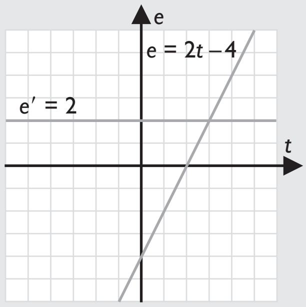
¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

a) $e(5) = 6$ m

b) $v(t) = e'(t) = 2$ m/s

c)



El espacio es una función afín y la velocidad es una función constante.

35 La longitud de un feto a lo largo del embarazo viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{600}$$

donde x se mide en semanas, e y, en centímetros.

a) Si el embarazo dura 40 semanas, ¿cuánto mide el niño?

b) ¿En qué momento crece más rápidamente; es decir, cuándo es máxima la derivada?

Solución:

a) $f(40) = \dfrac{160}{3} = 53,33$ cm

b) $f'(x) = \dfrac{x}{5} - \dfrac{x^2}{200}$

$f''(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{x}{100}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{5} - \dfrac{x}{100} = 0 \Rightarrow x = 20$ semanas

$f'''(x) = -\dfrac{1}{100} < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

36 Los beneficios anuales de una empresa se ajustan a la siguiente función:

$$B(x) = \frac{100x}{x^2 + 25}$$

donde x es el número de años que lleva funcionando y $B(x)$ se mide en millones de euros.

a) ¿En qué momento los beneficios son máximos?

b) Calcula los beneficios en el momento en que sean máximos.

Solución:

a) $B(x) = \dfrac{100x}{x^2 + 25}$

$B'(x) = \dfrac{-100x^2 + 2\,500}{(x^2 + 25)^2}$

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -5$

(El valor negativo no tiene sentido).

$B''(x) = \dfrac{200x^3 - 15\,000x}{(x^2 + 25)^3}$

$B''(5) = -\dfrac{2}{5} < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Los beneficios son máximos a los 5 años.

b) $B(5) = 10$ millones de euros

37 Los valores de las acciones de una determinada empresa, a lo largo de los 12 meses de un año, están definidos por la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{50} - \frac{3x^2}{10} + \frac{24x}{25} + 15$$

donde x es el número del mes y $f(x)$ es el valor de cada acción en euros.

Calcula:

a) El valor de las acciones al comenzar el año.
b) El valor de las acciones al final del año.
c) El valor máximo y mínimo de las acciones a lo largo del año.

Solución:

a) $f(0) = 15$ €

b) $f(12) = \dfrac{447}{25} = 17{,}88$ €

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{50} - \dfrac{3x}{5} + \dfrac{24}{25}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 8$

$f''(x) = -\dfrac{3x}{25} - \dfrac{3}{5}$

$f''(2) = -9/25 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo. Alcanza el máximo relativo en el segundo mes y valen a $397/25 = 15{,}88$ €

Como el máximo relativo es menor que el valor de las acciones al final del año, el mayor valor lo alcanzan al final del año y vale 17,88 €

$f''(8) = 9/25 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo. Alcanza el mínimo relativo en el octavo mes y valen a $343/25 = 13{,}72$ €

5. Problemas de optimización

38 Calcula dos números x e y tales que su producto sea máximo, sabiendo que suman 60

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = primer número.

y = segundo número.

$x + y = 60$

b) Función que hay que maximizar.

$f(x, y) = xy$

sujeto a: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x, y) = xy$

$f(x) = x(60 - x)$

$f(x) = 60x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 60 - 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 30$

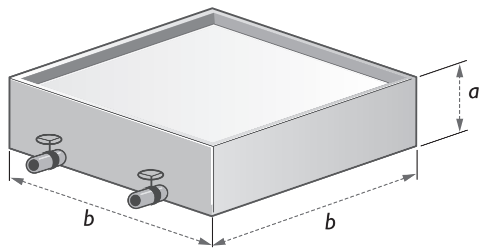
Si $x = 30 \Rightarrow y = 30$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(30) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

El primer número es $x = 30$ y el segundo $y = 30$

39 Se quiere construir un depósito abierto, es decir, sin tapa, con forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 48 m^2, ¿qué dimensiones debe tener el depósito?



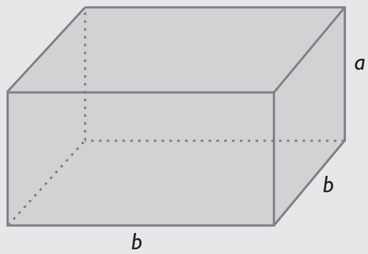
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

b = longitud de la base.

a = altura.

Superficie = 48 m^2



b) Función que hay que maximizar.

$V(b, a) = b^2a$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 48 $m^2 \Rightarrow 4ba + b^2 = 48$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$V(b, a) = b^2a$

$4ba + b^2 = 48 \Rightarrow a = \dfrac{48 - b^2}{4b}$

$V(b) = \dfrac{1}{4}(48b - b^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$V'(b) = \frac{1}{4}\left(48 - 3b^2\right)$

$V'(b) = 0 \Rightarrow b = -4$ y $b = 4$

(La solución negativa no tiene sentido).

Si $b = 4 \Rightarrow a = 2$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(b) = -\frac{3b}{2}$

$V''(4) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El depósito tiene de base un cuadrado de lado 4 m y altura 2 m, y tendrá un volumen de 32 m^3

40 La suma de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m. Halla las longitudes de los catetos para que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sea mínima.

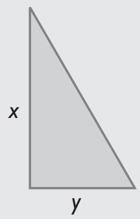
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = cateto mayor.

y = cateto menor.

Suma de los catetos = 12 m



b) Función que hay que maximizar.

$A(x, y) = x^2 + y^2$

Sujeta a las condiciones:

$x + y = 12$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = x^2 + y^2$

$x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$

$A(x) = x^2 + (12 - x)^2$

$A(x) = 2x^2 - 24x + 144$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$A'(x) = 4x - 24$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$

Si $x = 6 \Rightarrow y = 6$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(x) = 4$

$A''(6) = 4 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

f) El triángulo es isósceles y sus catetos miden 6 m

Elabora actividades para reforzar

41 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 12$

$y'' = 6x - 12$

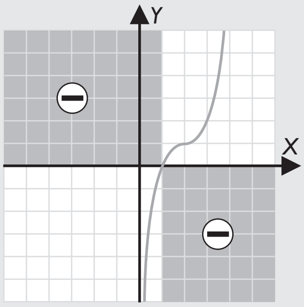
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(1, 0)$
   - Eje Y: $B(0, -7)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: $C(2, 1)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

42 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

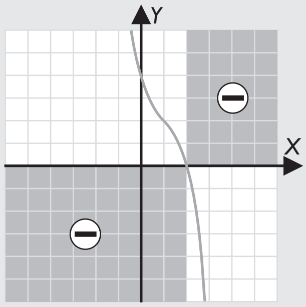
Solución:

$y' = -3x^2 + 6x - 4$

$y'' = -6x + 6$

$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   • Verticales: no tiene.
   • Horizontales: no tiene.
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: $A(2, 0)$
   • Eje Y: $B(0, 4)$
   Signo:
   • Positiva (+): $(-\infty, 2)$
   • Negativa (–): $(2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: no tiene.
   • Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $\varnothing$
   • Decreciente (↘): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C(1, 2)$
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(-\infty, 1)$
   • Cóncava (∩): $(1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

43 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 + 2x^2$$

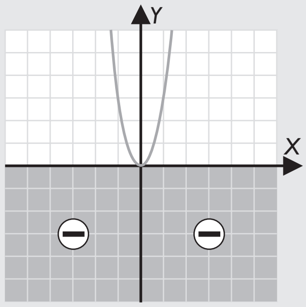
Solución:

$y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   • Verticales: no tiene.
   • Horizontales: no tiene.
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: $O(0, 0)$
   • Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   • Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   • Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: no tiene.
   • Mínimo relativo: $O(0, 0)$
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   • Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   • Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

44 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - \frac{8}{3}x^3$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x^2$

$y'' = 12x^2 - 16x$

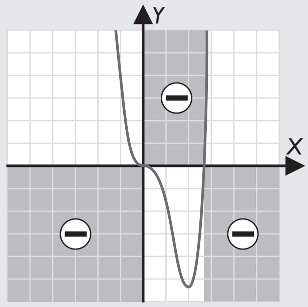
$y''' = 24x - 16$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$.
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A\left(\frac{8}{3}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$
   - Negativa (–): $\left(0, \frac{8}{3}\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $O\left(2, -\frac{16}{3}\right)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$, $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{256}{81}\right)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$
   - Cóncava (∩): $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

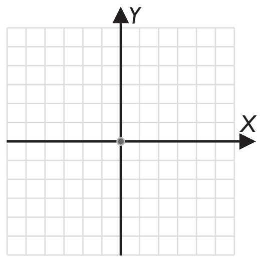


10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = [-16/3, +\infty)$

45 De una función polinómica de tercer grado se sabe que tiene un punto de inflexión en el punto $O(0, 0)$, no tiene ni máximos ni mínimos relativos, y que:

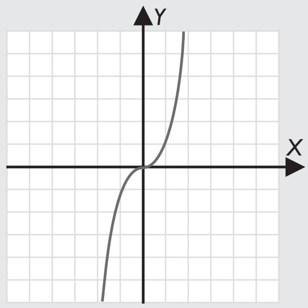
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno una gráfica a mano alzada. Halla una fórmula para esta gráfica.



Solución:

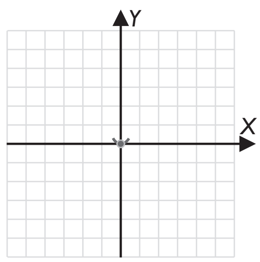
$y = x^3$



46 De una función polinómica de cuarto grado se sabe que tiene un solo mínimo relativo en el punto $O(0, 0)$, no tiene ni máximos relativos, ni puntos de inflexión, y que:

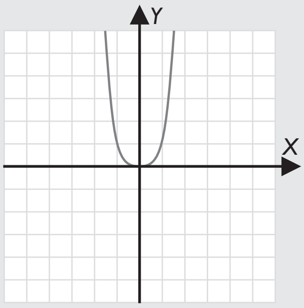
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno una gráfica a mano alzada.
Halla una fórmula para esta gráfica.



Solución:

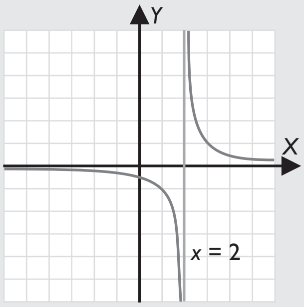
$y = x^4$



47 Halla una función racional que tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$

Solución:

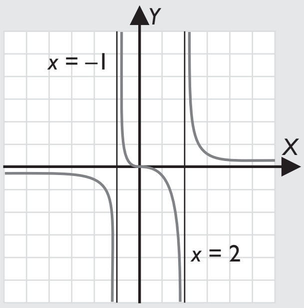
Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x - 2}$



48 Halla una función racional que tenga dos asíntotas verticales $x = 2$, $x = -1$

Solución:

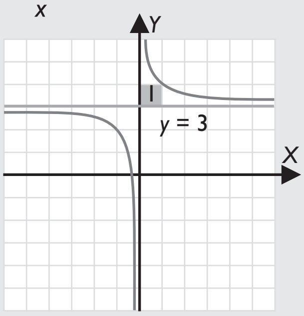
Por ejemplo, $y = \dfrac{x}{(x - 2)(x + 1)}$



49 Halla una función racional que tenga como asíntota horizontal la recta $y = 3$

Solución:

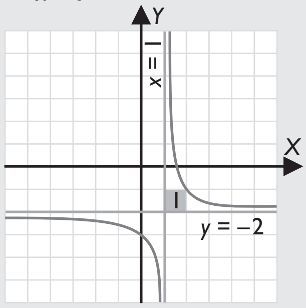
Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x} + 3$



50 Halla una función racional que tenga dos asíntotas: una vertical, $x = 1$, y otra horizontal, $y = -2$

Solución:

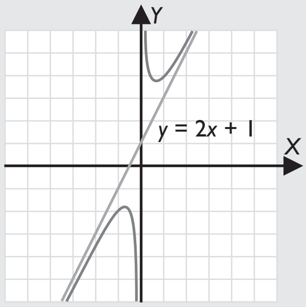
Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x - 1} - 2$



51 Halla una función racional que tenga como asíntota oblicua $y = 2x + 1$

Solución:

Por ejemplo, $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$, es decir, $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x}$



52 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{2x - 1}{x^2}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-2x + 2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{4x - 6}{x^4}$

$y''' = \dfrac{-12x + 24}{x^5}$

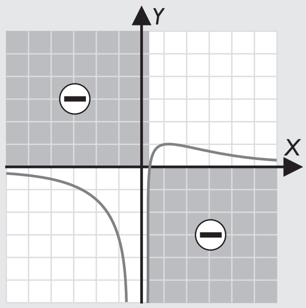
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $B(1, 1)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, 1)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{9}\right)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1]$

53 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución:

$$y' = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2 + 3)^3}$$

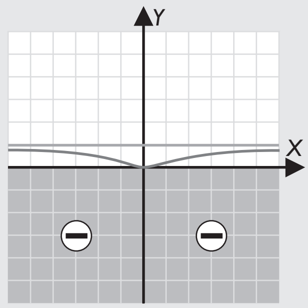
$$y''' = \frac{72x^3 - 216x}{(x^2 + 3)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: $A\left(-1, \frac{1}{4}\right), B\left(1, \frac{1}{4}\right)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [0, 1)$

54 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{4 - x^2}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x^3 - 24x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = \frac{6(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4}$$

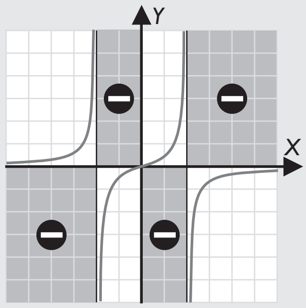
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} =$
   $= (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -2$ y $x = 2$, donde tiene discontinuidad de primera especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen.
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -2$, $x = 2$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

55 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2+1)^3}$$

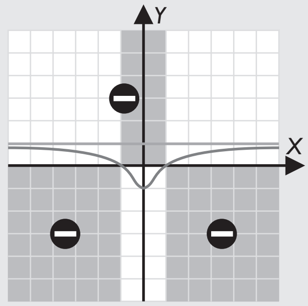
$$y''' = \frac{48x^3 - 48x}{(x^2+1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, -1)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
   - Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [-1, 1)$

56 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto $P(2, 3)$

Solución:

Pasa por $P(2, 3) \Rightarrow y(2) = 3 \Rightarrow 16a + 8b = 3$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2$

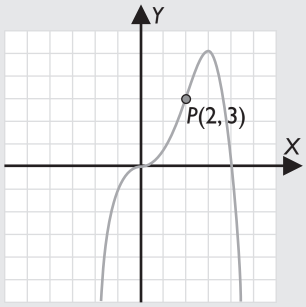
$y'' = 12ax^2 + 6bx$

Punto de inflexión en $P(2, 3) \Rightarrow y''(2) = 0 \Rightarrow 48a + 12b = 0$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = -\dfrac{3}{16}, b = \dfrac{3}{4}$

$y = -\dfrac{3x^4}{16} + \dfrac{3x^3}{4}$



57 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

tenga un mínimo relativo en el punto $P(1, 3)$

Solución:

Pasa por $P(1, 3) \Rightarrow y(1) = 3 \Rightarrow 1 + a + b = 3$

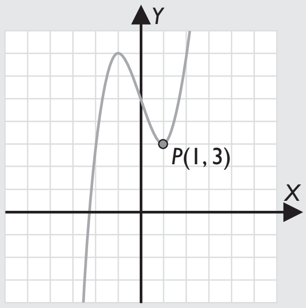
$y' = 3x^2 + a$

Mínimo relativo en $P(1, 3) \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0$

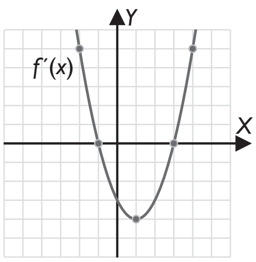
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = -3, b = 5$

$y = x^3 - 3x + 5$



58 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la parábola siguiente:



Calcula para $f(x)$:

a) La monotonía.

b) Las abscisas del máximo y del mínimo relativos.

c) La curvatura.

d) La abscisa del punto de inflexión.

e) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(-1, 3)$

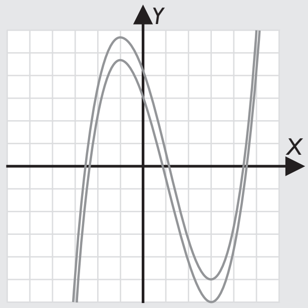
b) Tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$

c) Convexa ($\cup$): $(1, +\infty)$

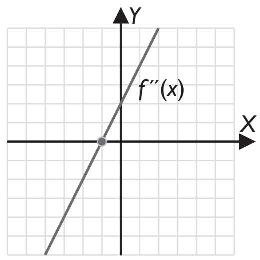
Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1)$

d) Punto de inflexión en $x = 1$

e)



59 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su segunda derivada $f''(x)$ es la recta siguiente:



Calcula para $f(x)$:

a) La curvatura.

b) La abscisa del punto de inflexión.

c) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

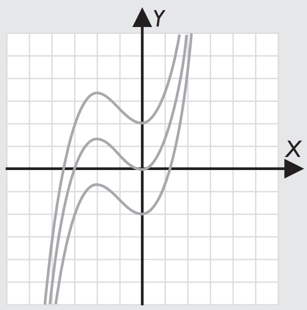
Solución:

a) Convexa ($\cup$): $(-1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1)$

b) Punto de inflexión en $x = -1$

c)



60 Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = \frac{t^2}{2} - 4t + 4$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 7 s

b) Calcula la velocidad al cabo de 7 s

c) Calcula la aceleración al cabo de 7 s

d) Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

a) $e(7) = \frac{1}{2}$ m

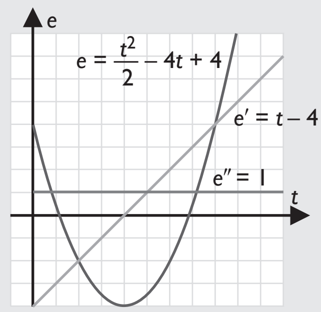
b) $v(t) = e'(t) = t - 4$

$v(7) = e'(7) = 3$ m/s

c) $a(t) = v'(t) = 1$

$a(7) = 1$ m/s^2

d)



La gráfica del espacio es una parábola; la de la velocidad, una recta inclinada, y la de la aceleración, una recta horizontal.

61 Un agente de seguros cobra una comisión que viene dada por la función:

$$C(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}05x + 20$$

Calcula cuántos seguros debe hacer para que la comisión sea máxima.

Solución:

$C'(x) = -0{,}002x + 0{,}05$

$C'(x) = 0 \Rightarrow x = 25$

$C''(x) = -0{,}002 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Para $x = 25$ seguros, obtiene la máxima comisión.

62 De todos los cilindros de volumen 16π m^3, halla el de superficie mínima.

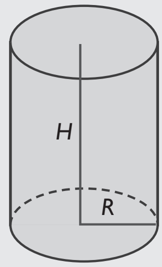
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

R = longitud del radio.

H = altura.

Volumen = 16π m^3



b) Función que hay que minimizar.

$A(R, H) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

Sujeta a las condiciones:

Volumen = 16π m$^3 \Rightarrow \pi R^2 H = 16\pi$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(R, H) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

$\pi R^2 H = 16\pi \Rightarrow H = \frac{16}{R^2}$

$A(R) = 2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(R) = 4\pi R - \frac{32\pi}{R^2}$

$A'(R) = 0 \Rightarrow R = 2$

Si $R = 2 \Rightarrow H = 4$

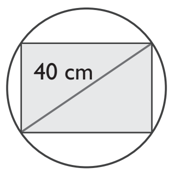
e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(R) = 4\pi + \frac{64\pi}{R^3}$

$A''(2) = 12\pi > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

f) El cilindro tiene un radio de 2 m y una altura de 4 m con una superficie mínima de 24π m^2

63 Calcula las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en una circunferencia de radio 20 cm



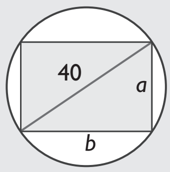
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

b = base del rectángulo.

a = altura del rectángulo.

Radio de la circunferencia circunscrita = 20 cm



b) Función que hay que maximizar.

$A(b, a) = ba$

Sujeta a las condiciones:

$b^2 + a^2 = 40^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(b, a) = ba$

$b^2 + a^2 = 40^2 \Rightarrow a = \sqrt{1\,600 - b^2}$

$A(b) = b\sqrt{1\,600 - b^2}$

$A(b) = \sqrt{1\,600b^2 - b^4}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$A'(b) = \frac{1\,600 - 2b^2}{\sqrt{1\,600 - b^2}}$$

$A'(b) = 0 \Rightarrow b = 20\sqrt{2},\ b = -20\sqrt{2}$

(La solución negativa no tiene sentido).

Si $b = 20\sqrt{2} \Rightarrow a = 20\sqrt{2}$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(b) = \frac{2b^3 - 4\,800b}{(1\,600 - b^2)\sqrt{1\,600 - b^2}}$$

$A''\left(20\sqrt{2}\right) = -4 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El rectángulo es un cuadrado de lado $20\sqrt{2}$ cm con un área de 800 cm^2

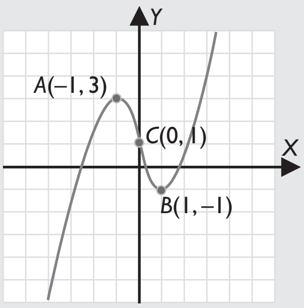
Elabora problemas

64 De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(-1, 3)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -1)$ y un punto de inflexión en el punto $C(0, 1)$, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Solución:



65 Estudia si en el punto $O(0, 0)$ la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = x^4 - x$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 1$

$y'' = 12x^2$

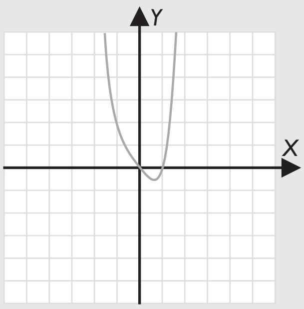
$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24$, es de orden par.

En el punto $O(0, 0)$ no hay punto de inflexión.



66 Estudia el punto $P(0, -1)$ de la función polinómica:

$$y = x^4 - 1$$

Solución:

$y' = 4x^3$

$y' = 0$

$y'' = 12x^2$

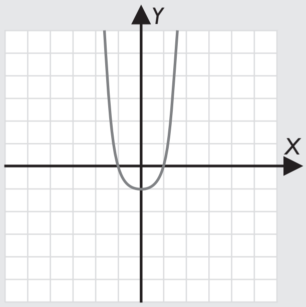
$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24 > 0\ (+)$

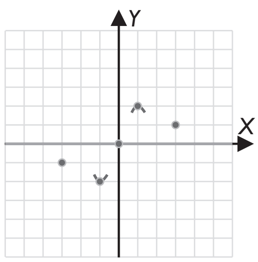
La función tiene un mínimo relativo en $P(0, -1)$



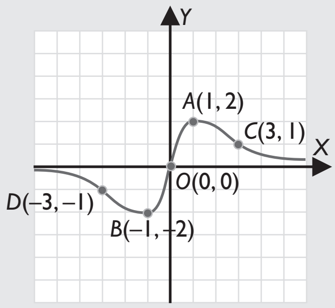
67 De una función racional se sabe que tiene como asíntota $y = 0$, tiene un máximo relativo en el punto $A(1, 2)$, un mínimo relativo en el punto $B(-1, -2)$, puntos de inflexión en $O(0, 0)$, $C(3, 1)$ y $D(-3, -1)$, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno la gráfica a mano alzada.



Solución:



68 Estudia el punto $P(0, 3)$ de la siguiente función racional:

$$y = \frac{9}{x^2 + 3}$$

Solución:

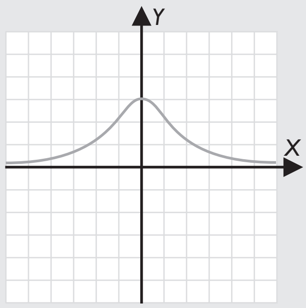
$y' = -\dfrac{18x}{(x^2+3)^2}$

$y'(0) = 0$

$y'' = \dfrac{54x^2 - 54}{(x^2+3)^3}$

$y''(0) = -2 < 0\ (-)$

El punto $P(0, 3)$ es un máximo relativo.



69 Estudia el punto $O(0, 0)$ de la siguiente función racional:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-3x^2 + 3}{(x^2+1)^2}$

$y'(0) = 3$

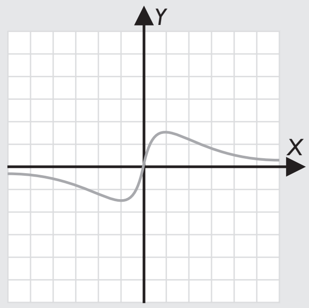
$y'' = -\dfrac{6x^3 - 18x}{(x^2+1)^3}$

$y''(0) = 0$

$y''' = -\dfrac{18(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2+1)^4}$

$y'''(0) = -18 \neq 0$

En el punto $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.



70 Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y tiene un mínimo relativo en el punto $P(2, -4)$

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

Pasa por $O(0, 0) \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Pasa por $P(2, -4) \Rightarrow y(2) = -4 \Rightarrow 4a + 2b = -4$

$y' = 2ax + b$

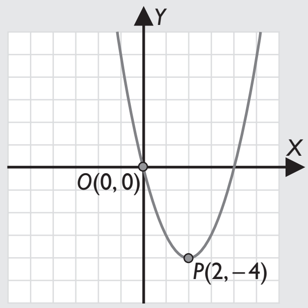
Tiene un mínimo relativo en $P(2, -4) \Rightarrow y'(2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a + b = 0$

Resolviendo el sistema:

$a = 1,\ b = -4,\ c = 0$

$y = x^2 - 4x$



71 Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo relativo en el punto $P(-2, 4)$

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

Pasa por $O(0, 0) \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Pasa por $P(-2, 4) \Rightarrow y(-2) = 4 \Rightarrow 4a - 2b = 4$

$y' = 2ax + b$

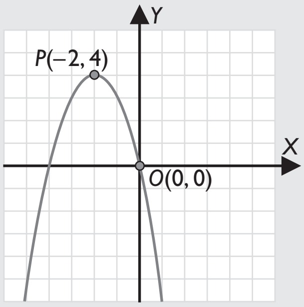
Tiene un máximo relativo en $P(-2, 4) \Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a + b = 0$

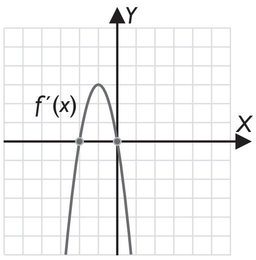
Resolviendo el sistema:

$a = -1,\ b = -4,\ c = 0$

$y = -x^2 - 4x$



72 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la parábola siguiente:



Calcula para $f(x)$:

a) La monotonía.

b) Las abscisas del máximo y del mínimo relativos.

c) La curvatura.

d) La abscisa del punto de inflexión.

e) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

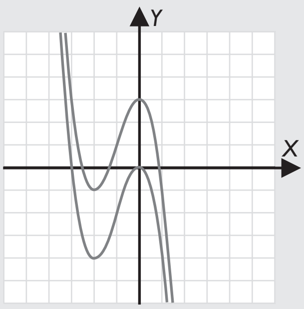
a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-2, 0)$
La función $f(x)$ es decreciente en: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

b) Tiene un mínimo relativo en $x = -2$ y tiene un máximo relativo en $x = 0$

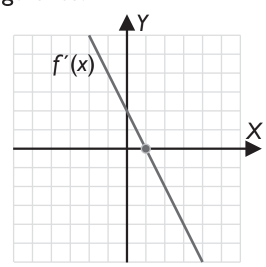
c) Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1)$
Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$

d) Punto de inflexión en $x = -1$

e)



73 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Calcula la fórmula de $f(x)$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$y' = -2x + 2$

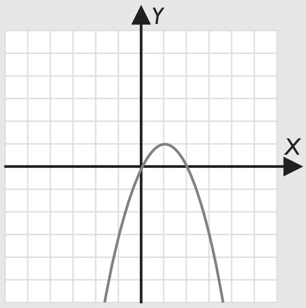
La función debe ser de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$

Como pasa por el origen: $c = 0$

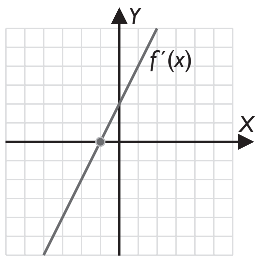
$y' = 2ax + b$

$2ax + b = -2x + 2 \Rightarrow a = -1, b = 2$

$y = -x^2 + 2x$



74 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Calcula la fórmula de $f(x)$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$y' = 2x + 2$

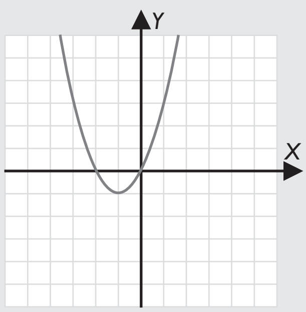
La función debe ser de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$

Como pasa por el origen: $c = 0$

$y' = 2ax + b$

$2ax + b = 2x + 2 \Rightarrow a = 1, b = 2$

$y = x^2 + 2x$



75 Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = 5t^2$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 3 s

b) Calcula la velocidad al cabo de 3 s

c) Calcula la aceleración al cabo de 3 s

d) Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

a) $e(3) = 45$ m

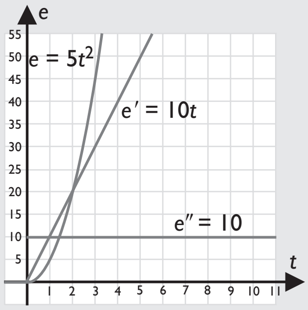
b) $v(t) = 10t$

$v(3) = 10 \cdot 3 = 30$ m/s

c) $a(t) = 10$

$a(3) = 10$ m/s^2

d)



La gráfica del espacio es una parábola; la de la velocidad, una recta inclinada, y la de la aceleración, una recta horizontal.

76 Las funciones que definen los ingresos y gastos de una empresa en millones de euros vienen dadas por:

$$I(x) = 6x - \frac{x^2}{2}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{6} + 2x + 4$$

donde x es el número de miles de unidades vendidas.

Halla la función que obtiene los beneficios y calcula cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

Solución:

$B(x) = I(x) - G(x)$

$B(x) = -\frac{2}{3}(x^2 - 6x + 6)$

$B'(x) = -\frac{4}{3}(x - 3)$

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

$B''(x) = -\frac{4}{3} < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Se obtiene el máximo en 3 000 unidades producidas.

77 Una entidad financiera saca al mercado unos fondos de inversión que se rentabilizan anualmente, de acuerdo con la fórmula:

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}08x + 5$$

donde x es la cantidad depositada en miles de euros y $R(x)$ es el tanto por ciento.

Calcula:

a) La cantidad que se debe invertir para obtener la mejor rentabilidad.

b) El tanto por ciento en el mejor de los casos.

Solución:

a) $R'(x) = -0{,}002x + 0{,}08$

$R'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$

$R''(x) = -0{,}002 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Con 40 000 € se alcanza la máxima rentabilidad.

b) $R(40) = 6{,}6\%$

78 La población de una ciudad a partir del instante inicial ($t = 0$) sigue la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 400t + 1600}{(t + 40)^2}$$

donde t es el número de años, y $P(t)$, la población en millones de habitantes.

a) ¿En qué año tendrá la ciudad el mayor número de habitantes?

b) ¿Cuántos habitantes tendrá en ese momento?

Solución:

a) $P'(t) = \frac{-320t + 12\,800}{(t + 40)^3}$

$P'(t) = 0 \Rightarrow t = 40$

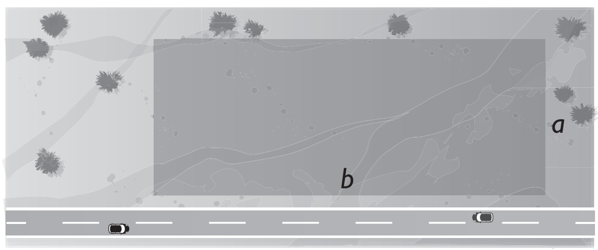
$P''(t) = \frac{640t - 51\,200}{(t + 40)^4}$

$P''(40) = -\frac{1}{1600} < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Se alcanza la máxima población a los 40 años.

b) $P(40) = 3 \Rightarrow$ 3 000 000 habitantes.

79 Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla junto a la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €



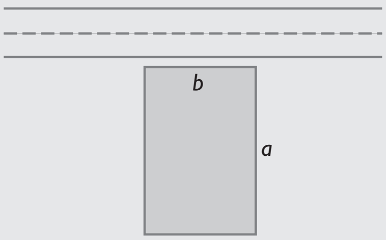
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

b = base del rectángulo.

a = altura del rectángulo.

$5b + 2b + 2a + 2a = 2\,800$



b) Función que hay que maximizar.

$A(b, a) = ba$

Sujeta a las condiciones:

$7b + 4a = 2\,800$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(b, a) = ba$

$7b + 4a = 2\,800 \Rightarrow a = \dfrac{2\,800 - 7b}{4}$

$A(b) = 700b - \dfrac{7}{4}b^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(b) = 700 - \dfrac{7}{2}b$

$A'(b) = 0 \Rightarrow b = 200$

Si $b = 200 \Rightarrow a = 350$

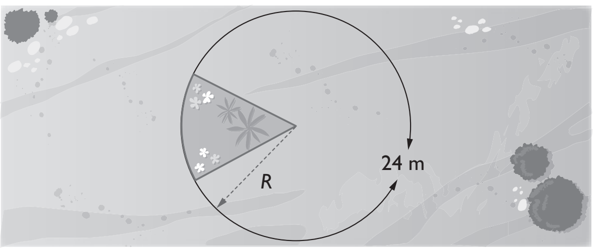
e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(b) = -\dfrac{7}{2}$

$A''(200) = -\dfrac{7}{2} < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El rectángulo tendrá al lado de la carretera 200 m y al otro lado 350 m, con un área de 70 000 m^2

80 Un jardinero quiere construir un parterre (jardín pequeño) con forma de sector circular de área máxima. Halla el radio del parterre sabiendo que el perímetro mide 24 m



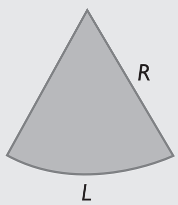
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

R = longitud del radio.

L = longitud del arco.

Perímetro = 24 m



b) Función que hay que maximizar.

$A(L, R) = \dfrac{1}{2}LR$

Sujeta a las condiciones:

$L + 2R = 24$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(L, R) = \dfrac{1}{2}LR$

$L + 2R = 24 \Rightarrow L = 24 - 2R$

$A(R) = 12R - R^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(R) = 12 - 2R$

$A'(R) = 0 \Rightarrow R = 6$

Si $R = 6 \Rightarrow L = 12$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(R) = -2$

$A''(6) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

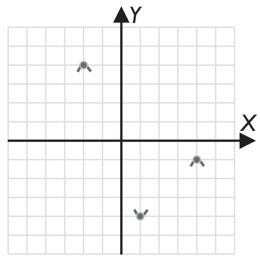
f) El jardín tendrá un radio de 6 m y una longitud de arco de 12 m, con un área de 36 m^2

Elabora problemas de más nivel

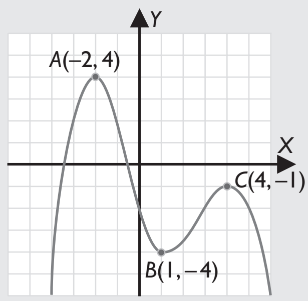
81 De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(-2, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -4)$, otro máximo relativo en el punto $C(4, -1)$, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno la gráfica a mano alzada.



Solución:



82 Estudia el punto $P(0, 1)$ de la función polinómica:

$$y = x^4 + 1$$

Solución:

$y' = 4x^3$

$y'(0) = 0$

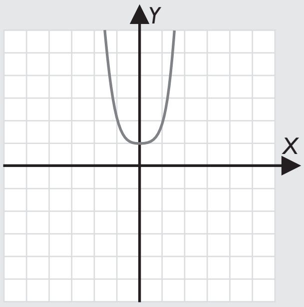
$y'' = 12x^2$

$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{iv} = 24 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.



83 Estudia si en el punto $O(0, 0)$ de la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = -x^4 - x$$

Solución:

$y' = -4x^3 - 1$

$y'' = -12x^2$

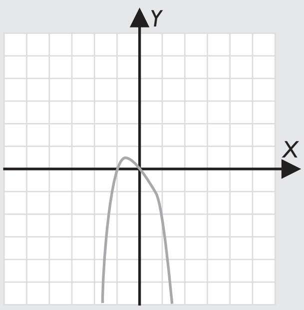
$y''(0) = 0$

$y''' = -24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = -24 < 0\ (-)$

En $O(0, 0)$ no hay punto de inflexión.

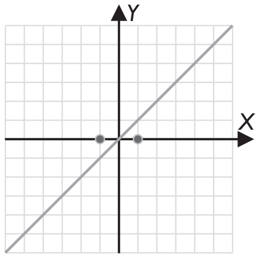


84 De una función racional se sabe que tiene como asíntotas $x = 0$ e $y = x$, corta al eje X en los puntos $A(1, 0)$ y $B(-1, 0)$, y que:

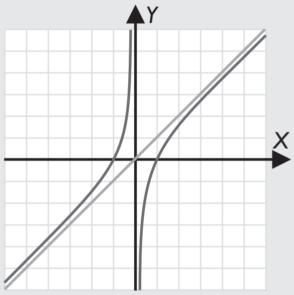
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.



Solución:



85 Estudia el punto $P(0, -1)$ de la siguiente función racional:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'(0) = 0$

$y'' = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

$y''(0) < 0\ (-) \Rightarrow (0, -1)$ Máximo relativo.

86 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{6}{x^4}$

$y''' = -\dfrac{24}{x^5}$

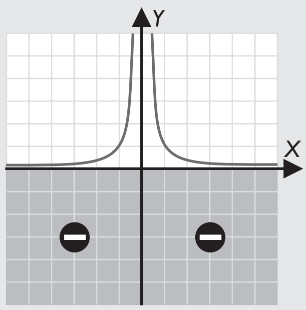
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

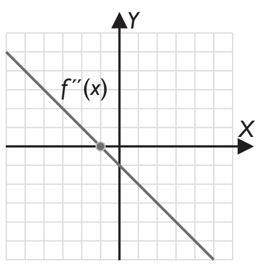
   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

87 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su segunda derivada $f''(x)$ es la recta siguiente:



Calcula para $f(x)$:

a) La curvatura.

b) La abscisa del punto de inflexión.

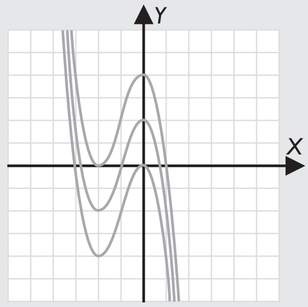
c) Haz una aproximación de una gráfica de $f(x)$

Solución:

a) Convexa (∪): $(-\infty, -1)$

   Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$

b) Tiene punto de inflexión en $x = -1$



88 Los gastos en euros de una empresa, en función del número de objetos que produce, vienen dados por la función:

$$G(x) = x^2 + 3x + 900$$

Se define el gasto medio como el gasto que cuesta producir un objeto, es decir:

$$GM(x) = \frac{G(x)}{x}$$

Calcula:

a) El número de objetos que tiene que producir para que el gasto medio sea mínimo.

b) El coste de cada pieza cuando el gasto medio sea mínimo.

Solución:

a) $GM(x) = x + 3 + \dfrac{900}{x}$

$GM'(x) = 1 - \dfrac{900}{x^2}$

$GM'(x) = 0 \Rightarrow x = -30\ ,\ x = 30$

(El valor negativo no tiene sentido).

$GM''(x) = \dfrac{1\,800}{x^3}$

$GM''(30) = \dfrac{1}{15} > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

b) $GM(30) = 63$ €

89 Halla la función polinómica de tercer grado que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$, tiene un máximo relativo en el punto $P(-2, 4)$ y un punto de inflexión en $Q(-1, 2)$

Solución:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pasa por $O(0, 0) \Rightarrow d = 0$

Pasa por $P(-2, 4) \Rightarrow y(-2) = 4 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 4$

Pasa por $Q(-1, 2) \Rightarrow y(-1) = 2 \Rightarrow -a + b - c + d = 2$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Máximo relativo en $P(-2, 4) \Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12a - 4b + c = 0$

$y'' = 6ax + 2b$

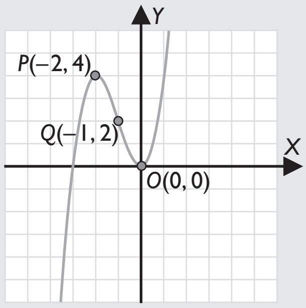
Punto de inflexión en $Q(-1, 2) \Rightarrow y''(-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6a + 2b = 0$

Resolviendo el sistema:

$a = 1, b = 3, c = 0, d = 0$

$y = x^3 + 3x^2$



90 La función que halla el número de personas que visitan un parque de atracciones en verano, desde las 8 hasta las 20 horas, viene dada por:

$$f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 1\,250$$

Calcula:

a) A qué hora hay más personas en el parque de atracciones.

b) A qué hora hay menos personas en el parque de atracciones.

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 90x + 600$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 20$

$f''(x) = 6x - 90$

$f''(10) = -30 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

$f''(20) = 30 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

a) Hay más personas a las 10 horas.

b) Hay menos personas a las 20 horas.

91 En una isla de Australia hay una plaga de conejos que sigue la función:

$$f(x) = \frac{500\,000}{x^2 - 50x + 626}$$

donde x representa el número de días.

Calcula:

a) En qué día hay más conejos y cuántos hay.

b) Con el paso del tiempo, ¿hacia dónde tiende a estabilizarse el número de conejos?

Solución:

a) $y' = \dfrac{1\,000\,000(25 - x)}{(x^2 - 50x + 626)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 25$

$y'' = \dfrac{1\,000\,000(3x^2 - 150x + 1874)}{(x^2 - 50x + 626)^3}$

$y''(25) = -1\,000\,000 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ Por tanto, se extinguen.

92 De todos los triángulos isósceles de perímetro 60 cm, halla el de área máxima.

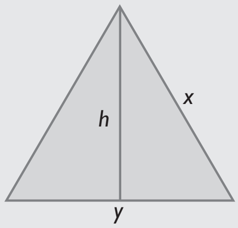
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = lado desigual del triángulo.

y = lado igual.

Perímetro = 60 cm



b) Función que hay que minimizar.

$A(x, y) = \dfrac{1}{2}\, y \cdot h$

Sujeta a las condiciones:

$2x + y = 60$

$h^2 = x^2 - \left(\dfrac{y}{2}\right)^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x) = (30 - x)\sqrt{60x - 900}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$A'(x) = \dfrac{3\sqrt{15}\,(20 - x)}{\sqrt{x - 15}}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 20$

Si $x = 20 \Rightarrow y = 20$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A(x) = \dfrac{3\sqrt{15}\,(10 - x)}{2(x - 15)\sqrt{x - 15}}$

$A''(20) = -3\sqrt{3} < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El triángulo de área máxima es el triángulo equilátero de 20 cm de lado.

93 Calcula un punto $P(x, y)$ de la parábola:

$$y = x^2$$

tal que su distancia al punto $A(0, 3)$ sea mínima.

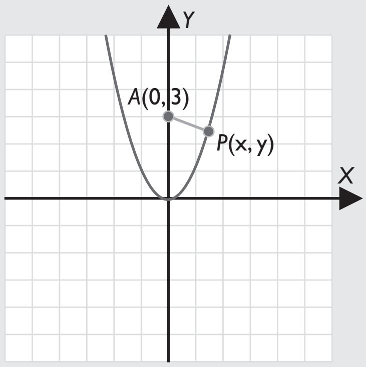
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

Punto incógnita: $P(x, y)$

Punto fijo: $A(0, 3)$

Parábola: $y = x^2$



b) Función que hay que minimizar.

$d(A, P) = d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$

Sujeta a las condiciones:

$y = x^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$d(y) = \sqrt{y + (y - 3)^2}$

$d(y) = \sqrt{y^2 - 5y + 9}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$d'(y) = \frac{2y - 5}{2\sqrt{y^2 - 5y + 9}}$$

$$d'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$\text{Si } y = \frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$d''(y) = \frac{11}{4(y^2 - 5y + 9)\sqrt{y^2 - 5y + 9}}$$

$$d''\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2\sqrt{11}}{11} > 0\ (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$$

f) Los puntos son:

$$P\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ y } Q\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$