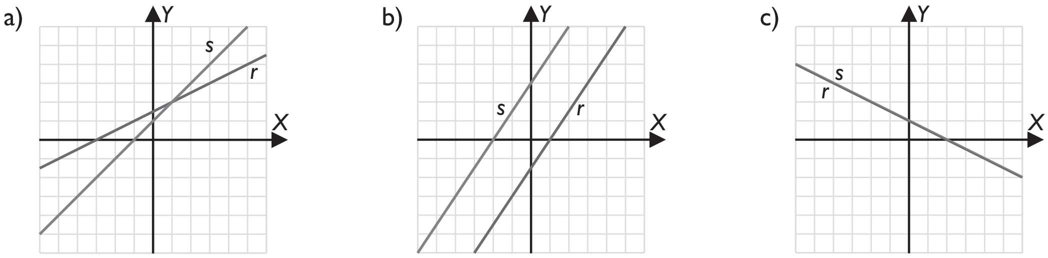
Unidad 11.
Plano afín y métrico

1. Propiedades afines

Explora

Calcula mentalmente y compara, en cada gráfico, las pendientes de las rectas *r* y *s* y di cuántos puntos tienen en común las rectas.



Solución:

a) $m_r = \frac{1}{2}$, $m_s = 1$

Tienen un punto en común.

b) $m_r = \frac{3}{2}$, $m_s = \frac{3}{2}$

No tienen ningún punto en común.

c) $m_r = -\frac{1}{2}$, $m_s = -\frac{1}{2}$

Tienen todos los puntos en común, son la misma recta.

Elabora

1 Determina cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $r \equiv 2x - 3y + 4 = 0$:

a) $A(1, 2)$

b) $B(3, 5)$

c) $C(-5, -2)$

d) $D(-1, 4)$

Solución:

a) $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0$
$A \in r$

b) $2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 4 = 6 - 15 + 4 = -5 \neq 0$
$B \notin r$

c) $2(-5) - 3(-2) + 4 = -10 + 6 + 4 = 0$
$C \in r$

d) $2(-1) - 3 \cdot 4 + 4 = -2 - 12 + 4 = -10 \neq 0$
$D \notin r$

2 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 2 \\ 6x - 10y = 3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 5 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\frac{1}{3} = \frac{-3}{-9} = \frac{2}{6}$

Coincidentes.

b) $\frac{3}{6} = \frac{-5}{-10} \neq \frac{2}{3}$

Paralelas.

c) $\frac{2}{4} \neq \frac{-3}{2}$

Secantes.

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

3 Halla la ecuación del haz de rectas paralelas a:

$$r \equiv 3x - 2y + 6 = 0$$

y, de ellas, calcula la que pasa por el punto $A(3, 2)$

Solución:

$3x - 2y + K = 0; K \in \mathbb{R}$

$A(3, 2) \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + K = 0 \Rightarrow 5 + K = 0 \Rightarrow K = -5$

$3x - 2y - 5 = 0$

4 Halla la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$ y escribe la ecuación de la que tiene pendiente 3

Solución:

$y = m(x - 1) + 2; m \in \mathbb{R}$

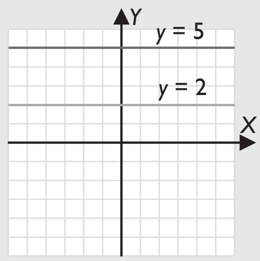
$m = 3 \Rightarrow y = 3(x - 1) + 2 \Rightarrow y = 3x - 1$

2. Propiedades métricas

Explora

Dibuja las rectas $y = 2$ e $y = 5$. Halla mentalmente el ángulo que forman y la distancia que hay entre ellas.

Solución:



Las rectas son paralelas; por tanto, forman un ángulo de cero grados.

La distancia entre ellas es de 3 unidades.

Elabora

5 Halla la distancia que hay entre los puntos $A(1, 4)$ y $B(5, 2)$

Solución:

$\overrightarrow{AB}(4, -2)$

$d(A, B) = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ unidades

6 Halla la distancia que hay del punto $P(3, 2)$ a la recta $r \equiv 4x - 3y + 9 = 0$

Solución:

$$d(P, r) = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3 \text{ unidades}$$

7 Halla la distancia que hay entre las rectas:

$$r \equiv x + 3y - 7 = 0$$

$$s \equiv 2x + 6y - 5 = 0$$

Solución:

Son paralelas:

$P(7, 0) \in r$

$$d(P, s) = \frac{|2 \cdot 7 + 6 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{9}{\sqrt{40}} = \frac{9}{2\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{20}$$

8 Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r \equiv 2x - 7y = 4$$

$$s \equiv 3x + 4y = 1$$

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{|2 \cdot 3 - 7 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + (-7)^2}\,\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$\alpha = 52° \, 48' \, 55''$

9 Calcula mentalmente las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(-4, 3)$ y $B(6, -5)$

Solución:

$M(1, -1)$

10 El punto $M(1, -1)$ es el punto medio del segmento AB. Si $A(-3, -4)$, calcula las coordenadas del punto B

Solución:

$B(x, y)$

$$\frac{-3 + x}{2} = 1 \Rightarrow -3 + x = 2 \Rightarrow x = 5$$

$$\frac{-4 + y}{2} = -1 \Rightarrow -4 + y = -2 \Rightarrow y = 2$$

$B(5, 2)$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

3. Lugares geométricos

Explora

Dados los puntos $A(4, 1)$ y $B(-2, 5)$, halla mentalmente el punto medio y la pendiente del segmento AB

Solución:

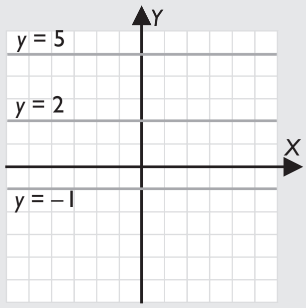
$M(1, 3)$

$\overrightarrow{AB}(-6, 4) \Rightarrow m = -\dfrac{2}{3}$

Elabora

11 Dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que están a 3 unidades de la recta $y = 2$. Halla mentalmente su ecuación.

Solución:



Son las rectas: $y = 5$, $y = -1$

12 Halla mentalmente la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los siguientes puntos: $A(1, 2)$ y $B(5, 2)$

Solución:

$x = 3$

13 Halla la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los siguientes puntos: $A(2, 1)$ y $B(-4, 3)$

Solución:

$M(-1, 2)$

$\overrightarrow{AB}(-6, 2) \parallel (3, -1) \Rightarrow m_{AB} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow m = 3$

$y = 3(x + 1) + 2$

$y = 3x + 5$

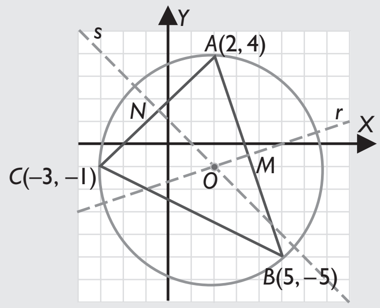
14 Halla mentalmente la ecuación de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Solución:

$y = x$

15 Calcula el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(2, 4)$, $B(5, -5)$ y $C(-3, -1)$

Solución:



• Mediatriz r del lado AB:

$M\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

$m_{AB} = -3 \Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$

$y = \dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right) - \dfrac{1}{2}$

$r \equiv x - 3y - 5 = 0$

• Mediatriz s del lado AC:

$N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

$m_{AC} = 1 \Rightarrow m = -1$

$y = -\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{3}{2}$

$s \equiv x + y - 1 = 0$

Resolviendo el sistema formado por r y s, se obtiene el circuncentro: $O(2, -1)$

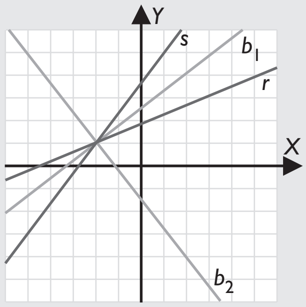
16 Aplicando la propiedad de que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados, halla las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:

$$r \equiv 5x - 12y + 22 = 0$$

$$s \equiv 4x - 3y + 11 = 0$$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

Solución:



$d(P, r) = d(P, s)$

$$\frac{|5x - 12y + 22|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$b_1 \equiv 9x + 7y + 11 = 0$

$b_2 \equiv 7x - 9y + 23 = 0$

4. Alturas y medianas de un triángulo

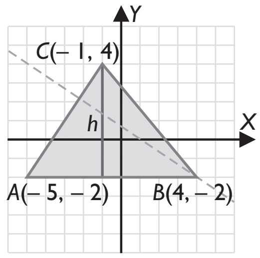
Explora

Calcula mentalmente:

a) El área del triángulo del dibujo, que tiene como vértices los puntos $A(-5, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(-1, 4)$

b) La pendiente del lado AC

c) La pendiente de una recta perpendicular al lado AC que pasa por el vértice B



Solución:

a) $A = 27\ u^2$

b) $m_{AC} = \dfrac{3}{2}$

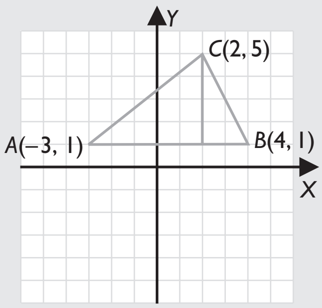
c) $m = -\dfrac{2}{3}$

Elabora

17 Dibuja la altura relativa al lado AB, y calcula mentalmente la longitud de dicha altura en el triángulo que tiene como vértices los puntos:

$A(-3, 1)$, $B(4, 1)$ y $C(2, 5)$

Solución:

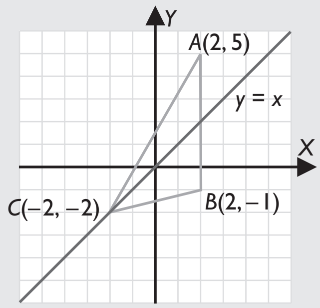


Altura = 4 unidades

18 Dibuja y halla mentalmente la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado AB del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$A(2, 5)$, $B(2, -1)$ y $C(-2, -2)$

Solución:



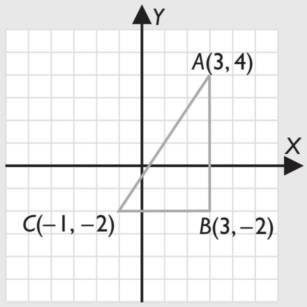
Mediana: $y = x$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

19 Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos y calcula mentalmente su área:

$$A(3, 4),\ B(3, -2) \text{ y } C(-1, -2)$$

Solución:

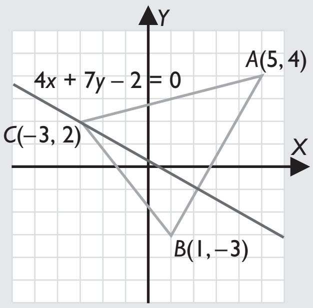


Área = 12 u²

20 Dibuja y halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al lado *AB* del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(5, 4),\ B(1, -3) \text{ y } C(-3, 2)$$

Solución:



Ecuación de la recta que contiene a la altura:

$C(-3, 2)$

$m_{AB} = \dfrac{7}{4}$

$m = -\dfrac{4}{7}$

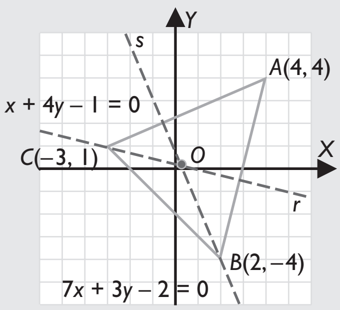
$y = -\dfrac{4}{7}(x + 3) + 2$

$4x + 7y - 2 = 0$

21 Halla y dibuja el ortocentro del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(4, 4),\ B(2, -4) \text{ y } C(-3, 1)$$

Solución:



• Recta que contiene a la altura relativa al lado *AB*:

$C(-3, 1)$

$m_{AB} = 4$

$m = -\dfrac{1}{4}$

$r \equiv x + 4y - 1 = 0$

• Recta que contiene a la altura relativa al lado *AC*:

$B(2, -4)$

$m_{AC} = \dfrac{3}{7}$

$m = -\dfrac{7}{3}$

$s \equiv 7x + 3y - 2 = 0$

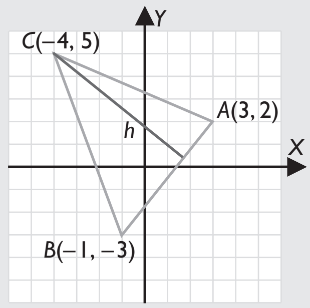
Resolviendo el sistema formado por *r* y *s*, se obtiene el ortocentro:

$O\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$

22 Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos y halla su área:

$$A(3, 2),\ B(-1, -3) \text{ y } C(-4, 5)$$

Solución:



Longitud de la base:

$d(A, B) = \sqrt{41}$

Altura:

Ecuación de la recta que contiene al lado *AB*:

$r \equiv 5x - 4y - 7 = 0$

$h = d(C, r) = \dfrac{47}{\sqrt{41}}$ unidades

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{41}} \cdot \dfrac{47}{\cancel{\sqrt{41}}} = 23{,}5 \text{ u}^2$

Actividades finales

Elabora actividades de las secciones

1. Propiedades afines

23 Determina cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $4x + y - 8 = 0$:

a) $A(1, 4)$ b) $B(-2, 0)$ c) $C(3, -4)$ d) $D(-3, 20)$

Solución:

A, C y D

24 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left.\begin{array}{r} x - 7y = 8 \\ 4x - y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 6y = 5 \\ -2x + 12y = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{-7}{-1} \Rightarrow$ Secantes. b) $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-6}{12} \neq \dfrac{5}{3} \Rightarrow$ Paralelas.

25 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 3y = 1 \\ 8x - 6y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 6y = 5 \\ -2x + 5y = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\dfrac{8}{4} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Coincidentes.

b) $\dfrac{3}{-2} \neq \dfrac{-6}{5} \Rightarrow$ Secantes.

26 Halla la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto A y escribe la ecuación de la que tiene la pendiente, m, que se indica en cada caso:

a) $A(-1, 2)$ y $m = 2$ b) $A(2, 4)$ y $m = -3$

Solución:

a) $y = m(x + 1) + 2;\ m \in \mathbb{R}$

$m = 2 \Rightarrow y = 2x + 4$

b) $y = m(x - 2) + 4;\ m \in \mathbb{R}$

$m = -3 \Rightarrow y = -3x + 10$

27 Halla la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta $r \equiv 4x + 5y - 2 = 0$ y, de ellas, calcula la que pasa por el punto $A(1, -2)$

Solución:

$4x + 5y + K = 0;\ K \in \mathbb{R}$

$A(1, -2) \Rightarrow K = 6$

$4x + 5y + 6 = 0$

2. Propiedades métricas

28 Halla la distancia que hay entre los puntos A y B en los casos siguientes:

a) $A(2, 5)$ y $B(-3, 1)$ b) $A(-2, 4)$ y $B(2, 0)$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}\ (-5, -4) \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{41}$ unidades

b) $\overrightarrow{AB}\ (4, -4) \Rightarrow d(A, B) = 4\sqrt{2}$ unidades

29 Halla la distancia del punto P a la recta r en cada caso:

a) $P(2, 5)$ y $r \equiv x - 3y + 5 = 0$

b) $P(-1, 3)$ y $r \equiv 3x + 5y - 7 = 0$

Solución:

a) $d(P, r) = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ unidades

b) $d(P, r) = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$ unidades

30 Halla la distancia que hay entre las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $r \equiv 2x + y - 5 = 0$ y $s \equiv 4x + 2y + 1 = 0$

b) $r \equiv x + 6y + 9 = 0$ y $s \equiv x + y - 6 = 0$

Solución:

a) Son paralelas:

$P(0, 5) \in r;\ d(r, s) = d(P, s) = \dfrac{11\sqrt{5}}{10}$

b) Son secantes: $d(r, s) = 0$

31 Halla el ángulo que forman las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $r \equiv x + y - 5 = 0$ y $s \equiv x + 2y + 3 = 0$

b) $r \equiv x - 4y + 9 = 0$ y $s \equiv 2x + 3y - 1 = 0$

Solución:

a) $\alpha = 18° 26' 6''$

b) $\alpha = 47° 43' 35''$

32 Calcula mentalmente las coordenadas del punto medio del segmento AB:

a) $A(-5, 2)$ y $B(1, -4)$ b) $A(3, 5)$ y $B(-1, -5)$

Solución:

a) $M(-2, -1)$ b) $M(1, 0)$

3. Lugares geométricos

33 Halla mentalmente la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los puntos $A(1, 2)$ y $B(1, 4)$

Solución:

$y = 3$

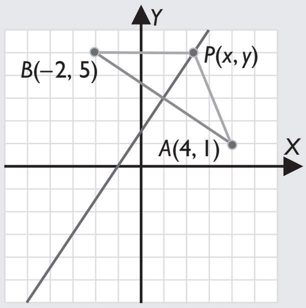
34 Aplicando la propiedad de que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos, halla la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los puntos $A(4, 1)$ y $B(-2, 5)$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

Solución:

a) Sea el punto $P(x, y)$

b)



c) $d(A, P) = d(B, P)$

d) $d(A, P) = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}$

$d(B, P) = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 5)^2}$

e) $\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 5)^2}$

f) Se eleva al cuadrado, se opera y se obtiene:

$3x - 2y + 3 = 0$

g) Se obtiene la ecuación de una recta.

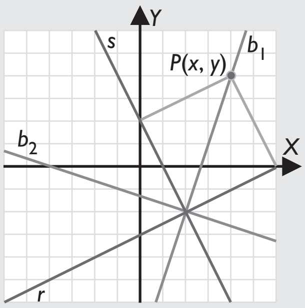
35 Halla las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:

$$r \equiv x - 2y - 6 = 0 \qquad s \equiv 2x + y - 2 = 0$$

Solución:

a) Sea $P(x, y)$

b)



c) $d(P, r) = d(P, s)$

d) $\dfrac{|x - 2y - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{|2x + y - 2|}{\sqrt{4 + 1}}$

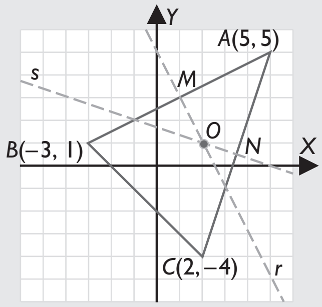
e) Se simplifica y se obtiene:

$b_1 \equiv 3x - y - 8 = 0 \qquad b_2 \equiv x + 3y + 4 = 0$

f) Se obtienen dos rectas que son las bisectrices.

36 Calcula el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(5, 5)$, $B(-3, 1)$ y $C(2, -4)$

Solución:



• Mediatriz del lado AB:

$M(1, 3)$

$m_{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = -2$

$y = -2(x - 1) + 3$

$r \equiv 2x + y - 5 = 0$

• Mediatriz del lado AC:

$N\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$m_{AC} = 3 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

$y = -\dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$

$s \equiv x + 3y - 5 = 0$

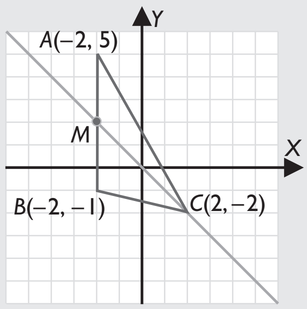
Resolviendo el sistema formado por r y s se obtiene el circuncentro: $O(2, 1)$

4. Alturas y medianas de un triángulo

37 Dibuja y halla mentalmente la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado AB del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(-2, 5),\ B(-2, -1) \text{ y } C(2, -2)$$

Solución:



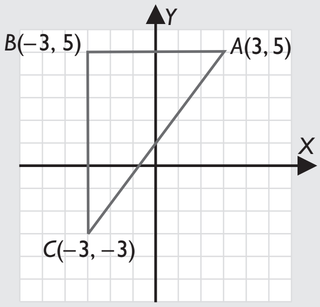
La mediana es $y = -x$

38 Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla mentalmente su área:

$$A(3, 5),\ B(-3, 5) \text{ y } C(-3, -3)$$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

Solución:



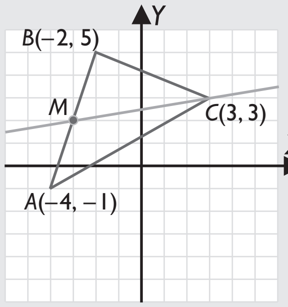
Área = 24 u^2

39 Dibuja el triángulo que tiene como vértices los puntos:

$A(-4, -1)$, $B(-2, 5)$ y $C(3, 3)$

Halla la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado AB

Solución:



Punto medio del lado AB es $M(-3, 2)$

$m_{MC} = \dfrac{1}{6}$

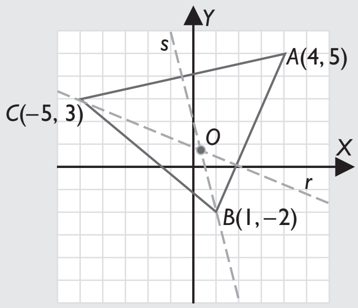
$y = \dfrac{1}{6}(x + 3) + 2$

La mediana es $x - 6y + 15 = 0$

40 Halla y dibuja el ortocentro del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$A(4, 5)$, $B(1, -2)$ y $C(-5, 3)$

Solución:



Recta que contiene a la altura relativa al lado AB:

$C(-5, 3)$

$m_{AB} = \dfrac{7}{3} \Rightarrow m = -\dfrac{3}{7}$

$y = -\dfrac{3}{7}(x + 5) + 3$

$r \equiv 3x + 7y - 6 = 0$

Recta que contiene a la altura relativa al lado AC:

$B(1, -2)$

$m_{AC} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow m = -\dfrac{9}{2}$

$y = -\dfrac{9}{2}(x - 1) - 2$

$s \equiv 9x + 2y - 5 = 0$

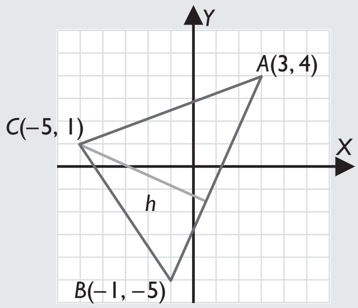
Resolviendo el sistema formado por r y s, se obtiene el ortocentro:

$O\left(\dfrac{23}{57}, \dfrac{13}{19}\right)$

41 Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla su área:

$A(3, 4)$, $B(-1, -5)$ y $C(-5, 1)$

Solución:



Longitud de la base:

$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{97}$ unidades

Altura:

Ecuación de la recta que contiene al lado AB:

$r \equiv 9x - 4y - 11 = 0$

$h = d(C, r) = \dfrac{|-45 - 4 - 11|}{\sqrt{97}} = \dfrac{60}{\sqrt{97}}$ unidades

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{97}} \cdot \dfrac{60}{\cancel{\sqrt{97}}} = 30 \text{ u}^2$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

Elabora actividades para reforzar

42 Estudia la posición relativa de los pares de rectas:

a) $r \equiv 2x + 3y - 1 = 0;\ s \equiv 3x - 4y - 5 = 0$

b) $r \equiv x + 5y - 6 = 0;\ s \equiv \dfrac{x-1}{-5} = y + 3$

c) $r \equiv y = -3x + 2;\ s \equiv \left.\begin{array}{l} x = \ \ 2 - \ t \\ y = -4 + 3t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$

d) $r \equiv x - 4y + 5 = 0;\ s \equiv y = 2x + 1$

Solución:

a) $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{-4} \Rightarrow$ Secantes.

b) $s \equiv x + 5y + 14 = 0$

$\dfrac{1}{1} = \dfrac{5}{5} \neq \dfrac{-6}{14} \Rightarrow$ Paralelas.

c) $r \equiv 3x + y - 2 = 0$

$s \equiv 3x + y - 2 = 0$

$\dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{-2} \Rightarrow$ Coincidentes.

d) $s \equiv 2x - y + 1 = 0$

$\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-4}{-1} \Rightarrow$ Secantes.

43 Halla la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto A y escribe la ecuación de la que tiene la pendiente, m, que se indica en cada caso:

a) $A(3, 2)$ y $m = -4$

b) $A(-2, 1)$ y $m = -\dfrac{1}{3}$

c) $A(-2, 0)$ y $m = -2$

d) $A(-1, 2)$ y $m = \dfrac{3}{2}$

Solución:

a) $y = m(x - 3) + 2;\ m \in \mathbb{R}$

$y = -4x + 14$

b) $y = m(x + 2) + 1;\ m \in \mathbb{R}$

$y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$

c) $y = m(x + 2);\ m \in \mathbb{R}$

$y = -2x - 4$

d) $y = m(x + 1) + 2;\ m \in \mathbb{R}$

$y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$

44 Halla la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta $r \equiv 5x - 3y + 7 = 0$ y, de ellas, calcula la que pasa por el punto $A(2, -3)$

Solución:

$5x - 3y + K = 0;\ K \in \mathbb{R}$

$5x - 3y - 19 = 0$

45 Halla la distancia del punto P a la recta r en cada caso:

a) $P(3, 5)$ y $r \equiv 6x - y + 1 = 0$

b) $P(-2, 5)$ y $r \equiv 3x - 4y + 9 = 0$

c) $P(0, -3)$ y $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{4}$

d) $P(0, 0)$ y $r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 + t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$

Solución:

a) $d(P, r) = \dfrac{14\sqrt{37}}{37}$ unidades

b) $d(P, r) = \dfrac{17}{5}$ unidades

c) $r \equiv 4x - 3y + 11 = 0$

$d(P, r) = 4$ unidades

d) $r \equiv x - y + 1 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ unidades

46 Halla la distancia que hay entre las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $r \equiv x + y - 3 = 0;\ s \equiv y = -x + 1$

b) $r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{3};\ \ s \equiv 3x - 4y = 0$

Solución:

a) $s \equiv x + y - 1 = 0$

r y s son paralelas.

$P(0, 3) \in r$

$d(r, s) = d(P, s) = \sqrt{2}$

b) $r \equiv 3x - 4y + 5 = 0$

r y s son paralelas.

$P(1, 2) \in r$

$d(r, s) = d(P, s) = 1$

47 Halla el ángulo que forman las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $r \equiv y = \dfrac{x}{2} + 3;\ s \equiv y = -x + 2$

b) $r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 + \ \ t \end{array}\right\};\ s \equiv y = 3x - 7$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

Solución:

a) $r \equiv x - 2y + 6 = 0$

$s \equiv x + y - 2 = 0$

$\alpha = 71° \ 33' \ 54''$

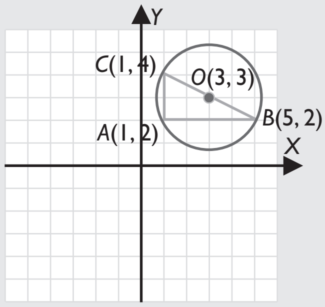
b) $r \equiv x - 2y + 5 = 0$

$s \equiv 3x - y - 7 = 0$

$\alpha = 45°$

48 Dibuja el triángulo que tiene los vértices en los puntos $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ y $C(1, 4)$, y halla mentalmente el circuncentro. Dibuja la circunferencia circunscrita.

Solución:

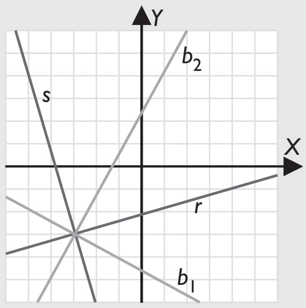


El circuncentro es el punto medio de la hipotenusa: $O(3, 3)$

49 Halla las bisectrices de las rectas:

$r \equiv 2x - 7y - 15 = 0 \qquad s \equiv 7x + 2y + 27 = 0$

Solución:



$d(P, r) = d(P, s)$

$$\frac{|2x - 7y - 15|}{\sqrt{4 + 49}} = \frac{|7x + 2y + 27|}{\sqrt{49 + 4}}$$

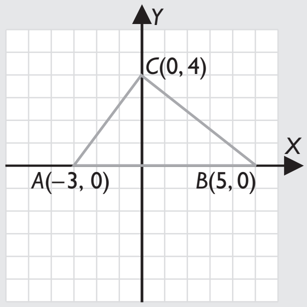
$b_1 \equiv 5x + 9y + 42 = 0$

$b_2 \equiv 9x - 5y + 12 = 0$

50 Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla mentalmente su área:

$A(-3, 0)$, $B(5, 0)$ y $C(0, 4)$

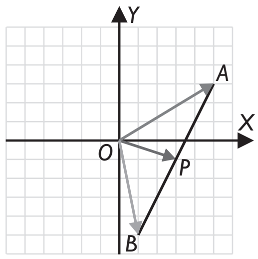
Solución:



Área = 16 u^2

Elabora problemas

51 Sea P el punto medio del segmento AB. Expresa $\overrightarrow{OP}$ en función de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$



Solución:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

52 Calcula el valor de k para que el punto $P(-3, 5)$ pertenezca a la recta determinada por los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, k)$

Solución:

Los vectores $\overrightarrow{PA} = (5, -2)$, $\overrightarrow{PB} = (2, k - 5)$ tienen que ser paralelos.

$$\frac{5}{2} = \frac{-2}{k - 5}$$

$$k = \frac{21}{5}$$

53 Halla el valor de k para que las rectas:

$$r \equiv 4x + ky + 8 = 0$$

$$s \equiv \frac{x + 1}{-2} = \frac{y + 3}{4}$$

sean paralelas.

Solución:

$s \equiv 2x + y + 5 = 0$

$$\frac{4}{2} = \frac{k}{1} \Rightarrow k = 2$$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

54 Calcula el valor de a y b para que las rectas:

$$r \equiv ax + 3y + 6 = 0$$
$$s \equiv bx - 2y - 1 = 0$$

sean perpendiculares y la recta r pase por el punto $A(3, 4)$.

Solución:

$ab - 6 = 0$

$3a + 12 + 6 = 0$

$a = -6,\ b = -1$

55 Halla la longitud del segmento determinado por los puntos de corte de la recta dada por la ecuación $3x + 5y - 15 = 0$ con los ejes de coordenadas.

Solución:

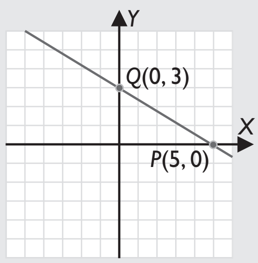
Se pasa la ecuación a forma canónica.

Se divide toda ella entre 15

$\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1$

$p = 5,\ q = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(5, 0),\ Q(0, 3)$



$d(P, Q) = \sqrt{34}$ unidades

56 Calcula el valor de k para que la distancia del punto $A(2, 1)$ a la recta $x - 2y + k = 0$ sea 5

Solución:

$\dfrac{|2 - 2 + k|}{\sqrt{5}} = 5$

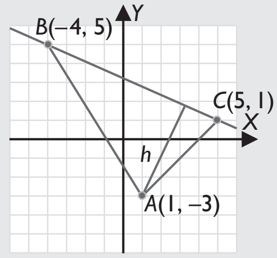
$k = \pm 5\sqrt{5}$

57 Dado el triángulo de vértices $A(1, -3)$, $B(-4, 5)$ y $C(5, 1)$, calcula:

a) La longitud de la altura que pasa por el vértice A

b) El área del triángulo.

Solución:



a) Recta que pasa por B y C

$r \equiv 4x + 9y - 29 = 0$

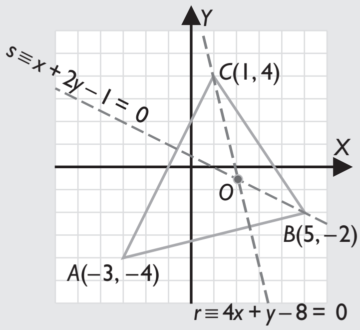
$h = d(A, r) = \dfrac{52}{\sqrt{97}}$ unidades

b) $d(B, C) = \sqrt{97}$

Área $= \dfrac{1}{2}\cancel{\sqrt{97}} \cdot \dfrac{52}{\cancel{\sqrt{97}}} = 26$ unidades cuadradas

58 Halla y dibuja el ortocentro del triángulo que tiene como vértices los puntos: $A(-3, -4)$, $B(5, -2)$ y $C(1, 4)$

Solución:



Recta que contiene a la altura relativa al lado AB:

$C(1, 4)$

$m_{AB} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow m = -4$

$y = -4(x - 1) + 4$

$r \equiv 4x + y - 8 = 0$

Recta que contiene a la altura relativa al lado AC:

$B(5, -2)$

$m_{AC} = 2 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

$y = -\dfrac{1}{2}(x - 5) - 2$

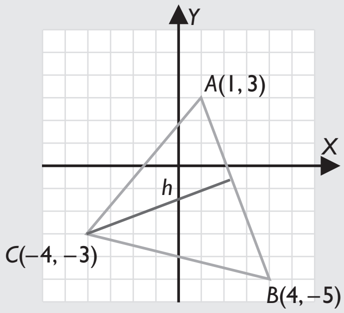
$s \equiv x + 2y - 1 = 0$

Resolviendo el sistema formado por r y s, se obtiene el ortocentro:

$O\left(\dfrac{15}{7}, -\dfrac{4}{7}\right)$

59 Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla su área: $A(1, 3)$, $B(4, -5)$ y $C(-4, -3)$

Solución:



Longitud de la base:

$d(A, B) = \sqrt{(4-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{73}$

Altura:

Ecuación de la recta que contiene al lado *AB*:

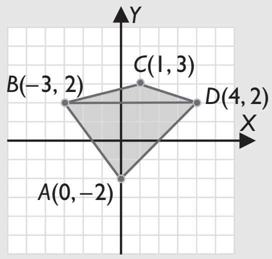
$r \equiv 8x + 3y - 17 = 0$

$h = d(C, r) = \dfrac{|-32 - 9 - 17|}{\sqrt{73}} = \dfrac{58}{\sqrt{73}}$ unidades

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{73}} \cdot \dfrac{58}{\cancel{\sqrt{73}}} = 29 \text{ u}^2$

60 Calcula el área del cuadrilátero $A(0, -2)$, $B(-3, 2)$, $C(1, 3)$ y $D(4, 2)$

Solución:



El cuadrilátero se divide en dos triángulos: *ABD* y *BCD*

- Área de *ABD*:

  $d(B, D) = 7$

  Recta que pasa por *BD*: $r \equiv y = 2$

  $h = d(A, r) = 4$

  $A_{ABD} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14 \text{ u}^2$

- Área de *BCD*:

  $d(B, D) = 7$

  Recta que pasa por *BD*: $r \equiv y = 2$

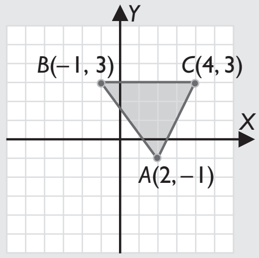
  $h = d(C, r) = 1$

  $A_{BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1 = \dfrac{7}{2} \text{ u}^2$

- $A_{ABCD} = \dfrac{35}{2} \text{ u}^2$

61 Calcula las amplitudes de los ángulos del triángulo de vértices $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$ y $C(4, 3)$

Solución:



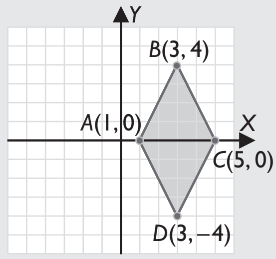
$\overrightarrow{AB}(-3, 4), \overrightarrow{AC}(2, 4) \Rightarrow A = 63° \, 26' \, 6''$

$\overrightarrow{BA}(3, -4), \overrightarrow{BC}(5, 0) \Rightarrow B = 53° \, 7' \, 48''$

$C = 180° - (A + B) = 63° \, 26' \, 6''$

62 Halla el área del rombo cuyos vértices son: $A(1, 0)$, $B(3, 4)$, $C(5, 0)$ y $D(3, -4)$

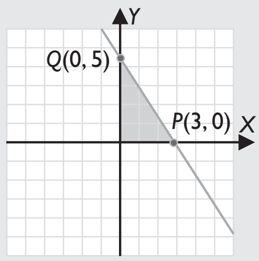
Solución:



$\text{Área} = D \cdot \dfrac{d}{2} = 8 \cdot \dfrac{4}{2} = 16$ unidades cuadradas

63 Calcula el área del triángulo formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de la recta $5x + 3y - 15 = 0$ con los ejes.

Solución:



Se pasa la ecuación a forma canónica y se divide entre 15

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 1$

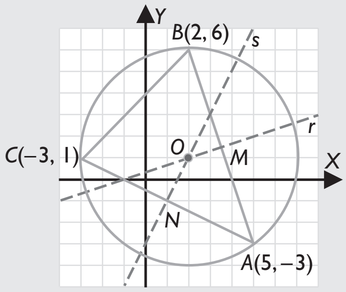
$p = 3, q = 5$

$\text{Área} = 3 \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$ unidades cuadradas

64 Halla el centro de la circunferencia que pasa por los siguientes puntos, y dibújala: $A(5, -3)$, $B(2, 6)$ y $C(-3, 1)$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

Solución:



Cálculo del centro de la circunferencia, que es el circuncentro.
Mediatriz del lado AB:

$M\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$m_{AB} = -3 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

$r \equiv x - 3y + 1 = 0$

Mediatriz del lado AC:

$N(1, -1)$

$m_{AC} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$

$s \equiv 2x - y - 3 = 0$

Resolviendo el sistema formado por r y s, se obtiene el circuncentro: $O(2, 1)$

65 Halla un punto de la recta $2x - y + 2 = 0$ que equidiste de los puntos $A(1, 0)$ y $B(-2, 0)$

Solución:

$P(x, y) \in r; \quad d(A, P) = d(B, P)$

Es la solución del sistema:

$$\left.\begin{aligned} &2x - y + 2 = 0 \\ &\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \end{aligned}\right\}$$

$x = -\frac{1}{2}, y = 1$

$P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

Elabora problemas de más nivel

66 Halla el haz de rectas que pasan por el origen y calcula la ecuación de la recta del haz, tal que la distancia del punto $P(2, 0)$ a dicha recta sea $\sqrt{2}$

Solución:

La ecuación del haz es: $y = mx$; $m \in \mathbb{R}$; y la recta $x = 0$

$d(P, r) = \sqrt{2}$

$mx - y = 0$

$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{2}$

$m = \pm 1$

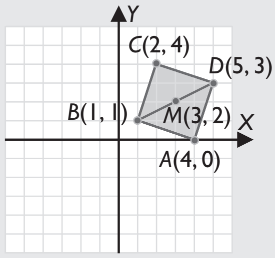
Hay dos ecuaciones del haz que verifican la condición:

$y = x$

$y = -x$

67 Un cuadrado tiene dos vértices opuestos en $B(1, 1)$ y $D(5, 3)$. Calcula las coordenadas de A y C y el área.

Solución:



El centro del cuadrado es el punto medio de la diagonal BD: $M(3, 2)$

El vector $\overrightarrow{MB}$ es $(-2, -1)$, que es una semidiagonal. Las otras dos semidiagonales perpendiculares son:

$\overrightarrow{MA}(1, -2)$ y $\overrightarrow{MC}(-1, 2)$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = (3, 2) + (1, -2) = (4, 0) \Rightarrow A(4, 0)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = (3, 2) + (-1, 2) = (2, 4) \Rightarrow C(2, 4)$

Área = (lado)^2; lado = $d(A, B)$

Lado = $\sqrt{10}$ unidades

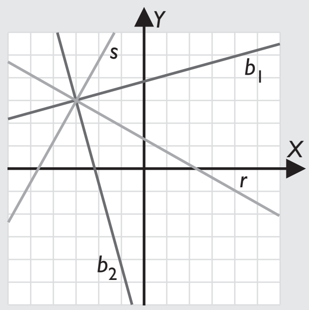
Área = 10 unidades cuadradas

68 Halla las bisectrices de los ángulos que forman las siguientes rectas:

$$r \equiv 4x + 7y - 9 = 0$$

$$s \equiv 7x - 4y + 33 = 0$$

Solución:



$d(P, r) = d(P, s)$

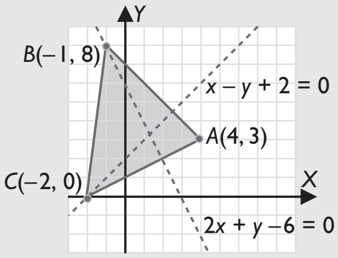
$$\frac{|4x + 7y - 9|}{\sqrt{16 + 49}} = \frac{|7x - 4y + 33|}{\sqrt{49 + 16}}$$

$b_1 \equiv 3x - 11y + 42 = 0; \quad b_2 \equiv 11x + 3y + 24 = 0$

69 Calcula los vértices del triángulo ABC, del que se conocen las coordenadas del punto $A(4, 3)$ y las ecuaciones de las alturas: $x - y + 2 = 0$, $2x + y - 6 = 0$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

Solución:



La recta que contiene al lado AB pasa por A y es perpendicular a la recta $x - y + 2 = 0$

$A(4, 3)$, $m_{AB} = -1$

$y - 3 = -(x - 4)$

$x + y - 7 = 0$

Resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x + y - 7 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{array}\right\}$ se obtiene el vértice: $B(-1, 8)$

La recta que contiene al lado AC pasa por A y es perpendicular a la recta $2x + y - 6 = 0$

$A(4, 3)$, $m_{AC} = \dfrac{1}{2}$

$y - 3 = \dfrac{1}{2}(x - 4)$

$x - 2y + 2 = 0$

Resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{array}\right\}$ se obtiene el vértice: $C(-2, 0)$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.