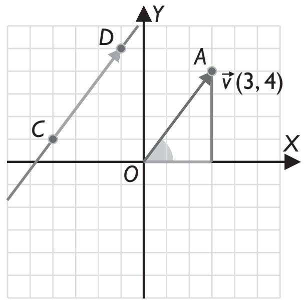
Unidad 10.
Vectores. Ecuaciones de la recta

1. Operaciones con vectores

Explora

Dado el vector $\vec{v}(3, 4)$ del dibujo siguiente, calcula mentalmente su longitud y la pendiente.

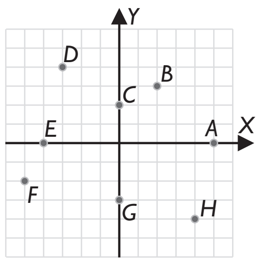


Solución:

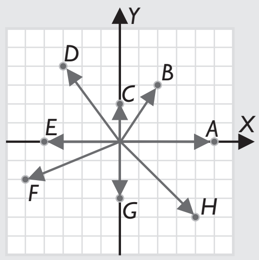
Longitud = 5 Pendiente = $\frac{4}{3}$

Elabora

1 Dibuja los vectores de posición de los siguientes puntos:



Solución:



2 Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(3, 4)$ b) $\vec{v}(-2, 2)$ c) $\vec{v}(-4, -2)$ d) $\vec{v}(2, -5)$

Solución:

a) $|\vec{v}| = 5$, $\alpha = 53° 7' 48''$

b) $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135°$

c) $|\vec{v}| = 2\sqrt{5}$, $\alpha = 206° 33' 54''$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{29}$, $\alpha = 291° 48' 5''$

3 Calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ analítica y gráficamente en los siguientes casos:

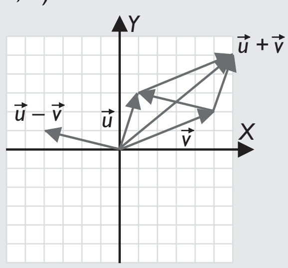
a) $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(5, 2)$

b) $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(4, 1)$

Solución:

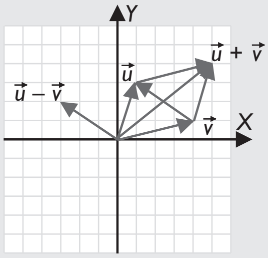
a) $\vec{u} + \vec{v} = (6, 5)$

$\vec{u} - \vec{v} = (-4, 1)$



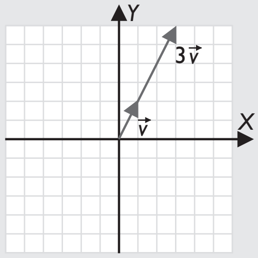
© Grupo Editorial Bruño, S. L.

b) $\vec{u} + \vec{v} = (5, 4)$
$\vec{u} - \vec{v} = (-3, 2)$

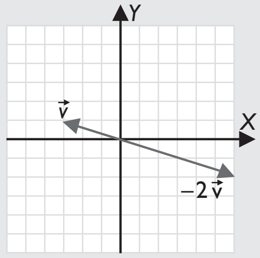


Solución:

a) $3\vec{v} = (3, 6)$



b) $-2\vec{v} = (6, -2)$



4 Calcula y representa en cada caso los vectores siguientes:

a) Multiplica por 3 el vector $\vec{v}(1, 2)$

b) Multiplica por -2 el vector $\vec{v}(-3, 1)$

5 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

a) $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$ b) $A(4, 1)$, $B(-3, 5)$

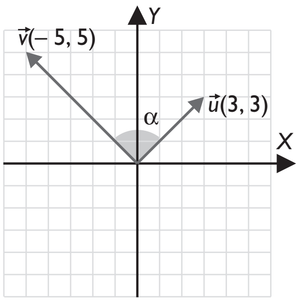
Solución:

a) $\overrightarrow{AB}\ (5, -3)$ b) $\overrightarrow{AB}\ (-7, 4)$

2. Producto escalar de vectores

Explora

Calcula de forma razonada y mentalmente el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del dibujo.



Solución:

Como el vector $\vec{u}$ está en la bisectriz del primer cuadrante y el $\vec{v}$ en la del segundo, forman un ángulo de 90°

Elabora

6 Halla el producto escalar de los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(3, 4)$ y $\vec{v}(-2, 5)$

b) $\vec{u}(-2, 0)$ y $\vec{v}(-3, -1)$

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 14$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

7 Calcula la proyección del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ siendo $\vec{u}(2, -1)$ y $\vec{v}(3, 4)$

Solución:

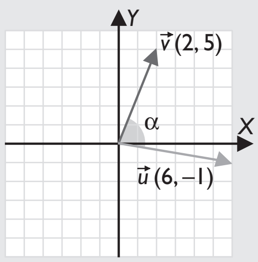
$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \text{ unidades}$$

8 Calcula el ángulo que forman los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(6, -1)$ y $\vec{v}(2, 5)$ b) $\vec{u}(-2, -5)$ y $\vec{v}(3, -4)$

Solución:

a)

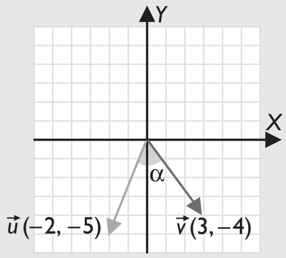


$$\cos \alpha = \frac{6 \cdot 2 - 1 \cdot 5}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}\ \sqrt{2^2 + 5^2}} = 0{,}2137$$

$\alpha = 77°\ 39'\ 39''$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

b)



$$\cos\alpha = \frac{-2 \cdot 3 - 5 \cdot (-4)}{\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}\ \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 0{,}5199$$

$\alpha = 58°\ 40'\ 17''$

9 Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(2, 6)$ y $\vec{v}(x, -3)$ sean perpendiculares.

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2x - 18 = 0 \Rightarrow x = 9$

10 Halla el valor de x de forma que el producto escalar de los vectores $\vec{u}(2, 3)$ y $\vec{v}(x, -2)$ sea igual a 4

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \Rightarrow 2x - 6 = 4 \Rightarrow x = 5$

11 Escribe las coordenadas de dos vectores perpendiculares a $\vec{v}(5, -3)$

Solución:

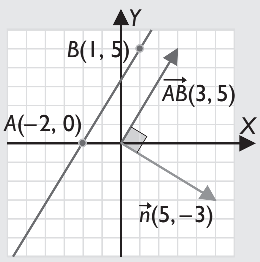
$\vec{n}_1(3, 5)$; $\vec{n}_2(-3, -5)$

3. Determinación de una recta

Explora

Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-2, 0)$ y $B(1, 5)$ y calcula mentalmente las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y las coordenadas de un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$

Solución:

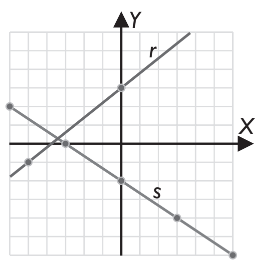


$\overrightarrow{AB}(3, 5)$

$\vec{n}(5, -3)$

Elabora

12 Determina el vector director de las rectas r y s



Solución:

Vector director de la recta r: $\vec{v}(5, 4)$

Vector director de la recta s: $\vec{v}(3, -2)$

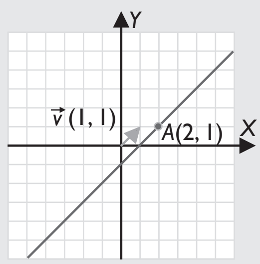
13 Dibuja, en cada caso, la recta que pasa por el punto A y tiene como vector director $\vec{v}$:

a) $A(2, 1)$, $\vec{v}(1, 1)$ b) $A(2, -4)$, $\vec{v}(-3, 2)$

c) $A(-2, -4)$, $\vec{v}(3, 1)$ d) $A(-3, 0)$, $\vec{v}(4, -3)$

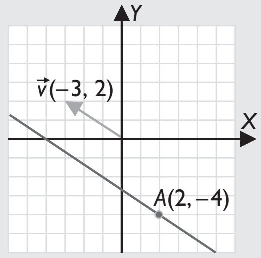
Solución:

a)

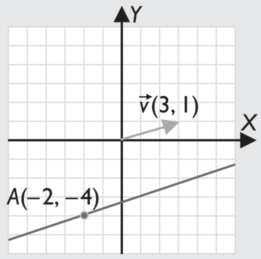


© Grupo Editorial Bruño, S. L.

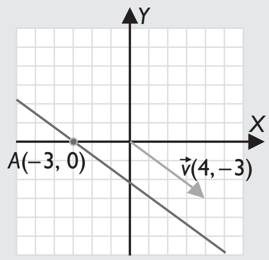
b)



c)



d)



14 Dibuja, en cada caso, la recta que pasa por los puntos *A* y *B*, calcula el vector director y la pendiente de la recta:

a) $A(1, 2)$, $B(-4, -1)$

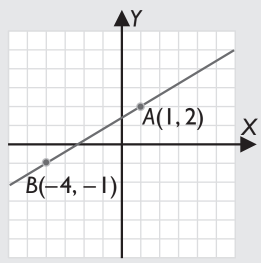
b) $A(-2, 3)$, $B(5, -1)$

c) $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$

d) $A(-1, 3)$, $B(5, -3)$

Solución:

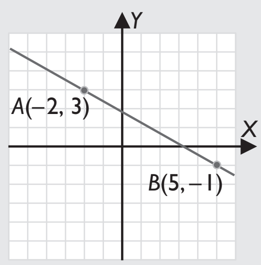
a)



$\vec{v}(5, 3)$

$m = \dfrac{3}{5}$

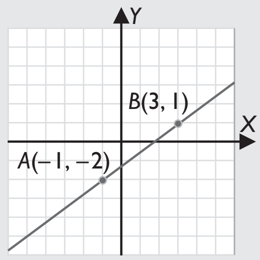
b)



$\vec{v}(7, -4)$

$m = -\dfrac{4}{7}$

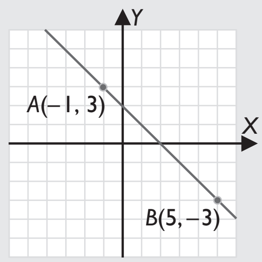
c)



$\vec{v}(4, 3)$

$m = \dfrac{3}{4}$

d)



$\vec{v}(6, -6) \parallel (1, -1)$

$m = -1$

15 Comprueba si los puntos $A(1, 4)$, $B(2, 1)$ y $C(3, -2)$ están alineados.

Solución:

$m_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{1-4}{2-1} = -3$; $m_{\overrightarrow{BC}} = \dfrac{-2-1}{3-2} = -3 \Rightarrow$ Están alineados.

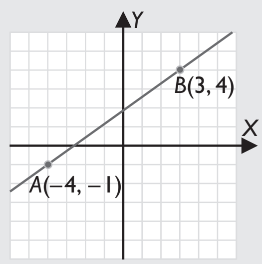
16 Dibuja la recta que pasa por los puntos *A* y *B* y calcula un vector director y uno normal a la recta en cada caso:

a) $A(-4, -1)$, $B(3, 4)$

b) $A(-2, 1)$, $B(1, -3)$

Solución:

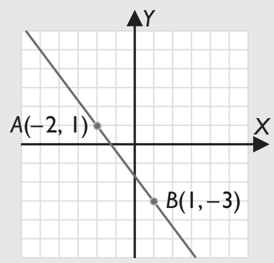
a)



$\overrightarrow{AB} = (7, 5)$

$\vec{n}(5, -7)$

b)



$\overrightarrow{AB} = (3, -4)$

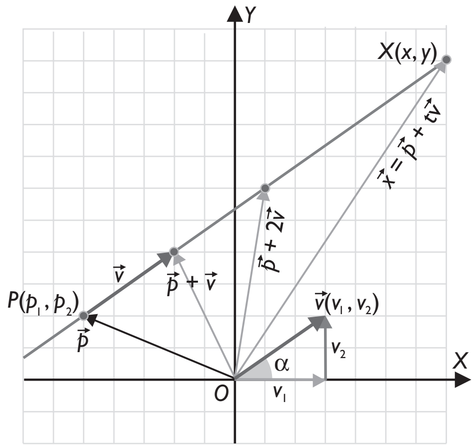
$\vec{n}(4, 3)$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

4. La recta en el plano

Explora

Calcula mentalmente las coordenadas del punto P, de un vector director, de un vector normal y el valor de la pendiente de la recta del dibujo siguiente.



Solución:
$P(-5, 2); \vec{v}(3, 2); \vec{n}(2, -3); m = \dfrac{2}{3}$

Elabora

17 Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de la recta determinada por el punto $P(-3, 1)$ y vector director $\vec{v}(2, 3)$

Solución:
Ecuación vectorial:
$(x, y) = (-3, 1) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$
Ecuaciones paramétricas:
$\left.\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$
Ecuación continua:
$\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{3}$
Ecuación general:
$3x - 2y + 11 = 0$
Ecuación explícita:
$y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$

18 Dada la recta $r \equiv 4x + 3y - 6 = 0$

a) Halla una recta s paralela a r que pase por el punto $P(3, 4)$

b) Halla una recta t perpendicular a r que pase por el punto $Q(-2, 1)$

Solución:
a) $4x + 3y - 24 = 0$ b) $3x - 4y + 10 = 0$

19 Dadas las siguientes rectas, escribe el tipo de ecuación, halla un punto, un vector director y la pendiente:

a) $(x, y) = (-2, 1) + t(3, 2), t \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{5}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = -4 + t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

d) $3x - 5y + 6 = 0$

e) $y = 3x - 4$

Solución:

a) Vectorial:
$P(-2, 1); \vec{v}(3, 2), m = \dfrac{2}{3}$

b) Continua:
$P(-5, 2); \vec{v}(4, 5), m = \dfrac{5}{4}$

c) Paramétricas:
$P(-4, 3); \vec{v}(1, 2), m = 2$

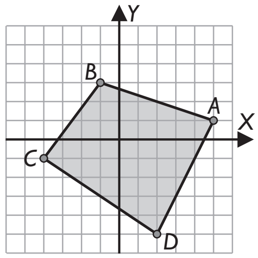
d) General:
$P(-2, 0); \vec{v}(5, 3), m = \dfrac{3}{5}$

e) Explícita:
$P(0, -4); \vec{v}(1, 3), m = 3$

Elabora actividades de las secciones

1. Operaciones con vectores

20 Dado el cuadrilátero de la figura, calcula:



a) Los vectores de posición de los vértices del cuadrilátero.

b) Las coordenadas de los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{DC}$

c) Las coordenadas de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ y representa el vector.

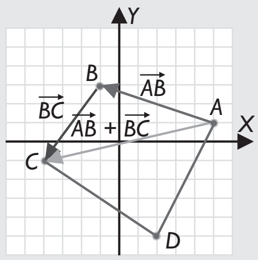
d) Las coordenadas de $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$ y representa el vector.

Solución:

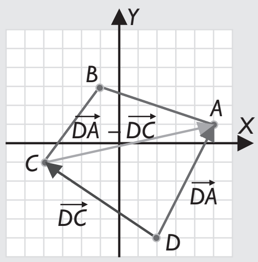
a) $\overrightarrow{OA}(5, 1)$; $\overrightarrow{OB}(-1, 3)$; $\overrightarrow{OC}(-4, -1)$; $\overrightarrow{OD}(2, -5)$

b) $\overrightarrow{AB}(-6, 2)$; $\overrightarrow{BC}(-3, -4)$; $\overrightarrow{DA}(3, 6)$; $\overrightarrow{DC}(-6, 4)$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-9, -2)$



d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = (9, 2)$



21 Calcula el módulo y el argumento del vector en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(1, 5)$ b) $\vec{v}(-3, 4)$ c) $\vec{v}(-2, -3)$ d) $\vec{v}(3, -5)$

Solución:

a) $|\vec{v}| = \sqrt{26}$, $\alpha = 78° \, 41' \, 24''$

b) $|\vec{v}| = 5$, $\alpha = 126° \, 52' \, 12''$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, $\alpha = 236° \, 18' \, 36''$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{34}$, $\alpha = 300° \, 57' \, 50''$

22 Calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ analítica y gráficamente en los siguientes casos:

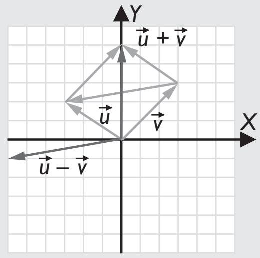
a) $\vec{u}(-3, 2)$ y $\vec{v}(3, 3)$

b) $\vec{u}(1, 2)$ y $\vec{v}(4, 3)$

Solución:

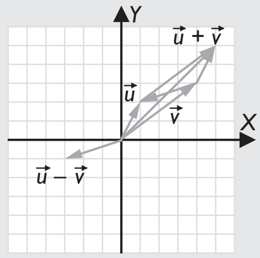
a) $\vec{u} + \vec{v} = (0, 5)$

$\vec{u} - \vec{v} = (-6, -1)$



b) $\vec{u} + \vec{v} = (5, 5)$

$\vec{u} - \vec{v} = (-3, -1)$



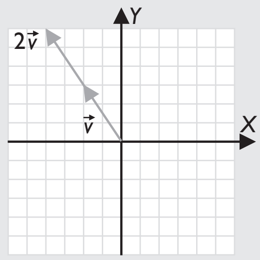
23 Calcula y representa en cada caso los siguientes vectores:

a) Multiplica por 2 el vector $\vec{v}(-2, 3)$

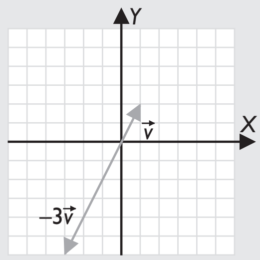
b) Multiplica por -3 el vector $\vec{v}(1, 2)$

Solución:

a) $2\vec{v} = (-4, 6)$



b) $-3\vec{v} = (-3, -6)$



© Grupo Editorial Bruño, S. L.

2. Producto escalar de vectores

24 Halla el producto escalar de los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(-2, 3)$ y $\vec{v}(4, -7)$ b) $\vec{u}(0, 1)$ y $\vec{v}(-5, 2)$

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -29$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

25 Calcula la proyección del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ siendo $\vec{u}(-3, 5)$ y $\vec{v}(2, 1)$

Solución:

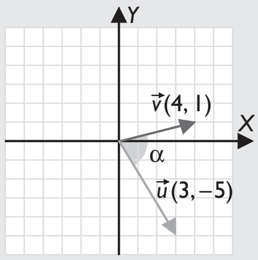
$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -0{,}45$$

26 Calcula el ángulo que forman los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(3, -5)$ y $\vec{v}(4, 1)$ b) $\vec{u}(5, -2)$ y $\vec{v}(-3, 4)$

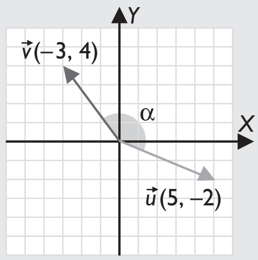
Solución:

a)



$\alpha = 73° \, 4' \, 21''$

b)



$\alpha = 148° \, 40' \, 17''$

27 Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(6, x)$ y $\vec{v}(5, -3)$ sean perpendiculares.

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 30 - 3x = 0 \Rightarrow x = 10$

28 Halla el valor de x de forma que el producto escalar de los vectores $\vec{u}(2, -4)$ y $\vec{v}(1, x)$ sea igual a 6

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

$2 - 4x = 6 \Rightarrow x = -1$

29 Analiza si los vectores $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(3, 2)$ son perpendiculares.

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 10 = 4 \neq 0$

No son perpendiculares.

30 Escribe las coordenadas de dos vectores perpendiculares a $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(3, -2)$ b) $\vec{v}(-1, -3)$

c) $\vec{v}(0, -1)$ d) $\vec{v}(1, 0)$

Solución:

a) $\vec{n}_1(2, 3)$; $\vec{n}_2(-2, -3)$

b) $\vec{n}_1(3, -1)$; $\vec{n}_2(-3, 1)$

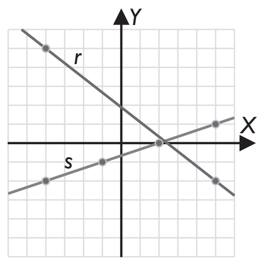
c) $\vec{n}_1(1, 0)$; $\vec{n}_2(-1, 0)$

d) $\vec{n}_1(0, 1)$; $\vec{n}_2(0, -1)$

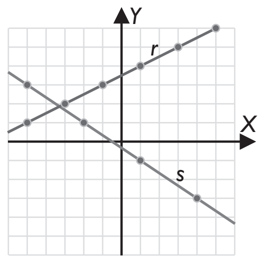
3. Determinación de una recta

31 Determina el vector director de las rectas r y s en cada caso:

a)



b)



Solución:

a) Vector director de la recta r: $\vec{v}(9, -7)$

Vector director de la recta s: $\vec{v}(3, 1)$

b) Vector director de la recta r: $\vec{v}(2, 1)$

Vector director de la recta s: $\vec{v}(3, -2)$

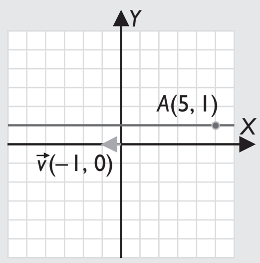
32 Dibuja, en cada caso, la recta que pasa por el punto A y tiene como vector director $\vec{v}$:

a) $A(5, 1)$, $\vec{v}(-1, 0)$ b) $A(-3, 0)$, $\vec{v}(2, 5)$

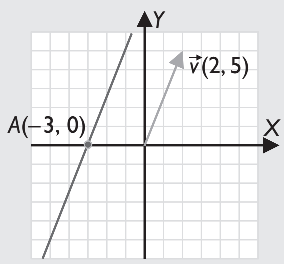
c) $A(-3, -2)$, $\vec{v}(4, -1)$ d) $A(2, 1)$, $\vec{v}(-3, 1)$

Solución:

a)

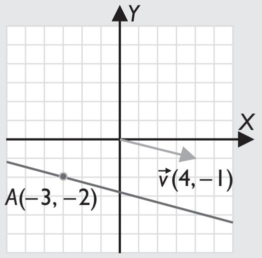


b)

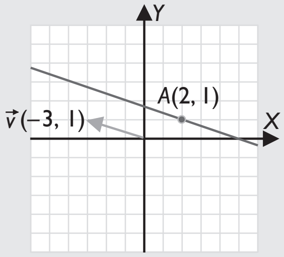


© Grupo Editorial Bruño, S. L.

c)



d)



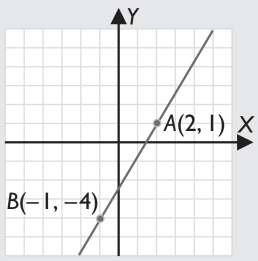
33 Dibuja la recta que pasa por los puntos A y B, y calcula el vector director, la pendiente y un vector normal de la recta en cada caso:

a) $A(2, 1)$, $B(-1, -4)$ b) $A(3, -2)$, $B(-1, 5)$

c) $A(-2, -1)$, $B(1, 3)$ d) $A(3, -1)$, $B(-3, 5)$

Solución:

a)

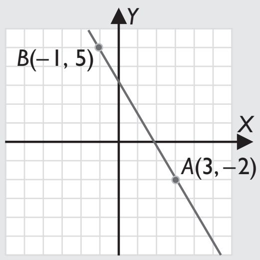


$\vec{v}(3, 5)$

$m = \dfrac{5}{3}$

$\vec{n}(5, -3)$

b)

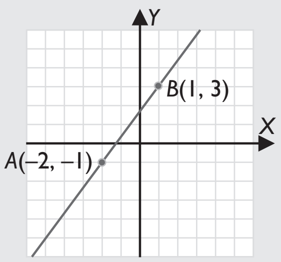


$\vec{v}(4, -7)$

$m = -\dfrac{7}{4}$

$\vec{n}(7, 4)$

c)

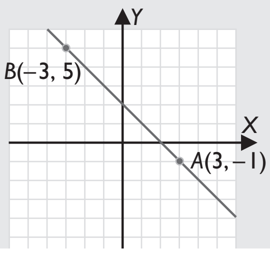


$\vec{v}(3, 4)$

$m = \dfrac{4}{3}$

$\vec{n}(4, -3)$

d)



$\vec{v}(-6, 6) \parallel (-1, 1)$

$m = -1$

$\vec{n}(1, 1)$

34 Comprueba si los puntos están alineados en cada caso:

a) $A(-2, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(3, 0)$

b) $A(-2, -1)$, $B(3, 4)$ y $C(1, 1)$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} m_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-5}{2+2} = \dfrac{-4}{4} = -1 \\ m_{\overrightarrow{BC}} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{0-1}{3-2} = \dfrac{-1}{1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l} m_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4+1}{3+2} = \dfrac{5}{5} = 1 \\ m_{\overrightarrow{BC}} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{1-4}{1-3} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ No están alineados.

4. La recta en el plano

35 Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de la recta determinada por el punto A y el vector director:

a) $A(2, 5)$ y $\vec{v}(2, 3)$ b) $A(-1, 3)$ y $\vec{v}(4, -1)$

c) $A(-2, 1)$ y $\vec{v}(2, 1)$ d) $A(0, 3)$ y $\vec{v}(1, -2)$

Solución:

a) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (2, 5) + t(2, 3);\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:

$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-5}{3}$

Ecuación general:

$3x - 2y + 4 = 0$

Ecuación explícita:

$y = \dfrac{3}{2}x + 2$

b) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-1, 3) + t(4, -1);\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 3 - t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:

$\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{-1}$

Ecuación general:

$x + 4y - 11 = 0$

Ecuación explícita:

$y = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{11}{4}$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

c) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-2, 1) + t(2, 1);\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x+2}{2} = y - 1$$

Ecuación general:

$x - 2y + 4 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{x}{2} + 2$$

d) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (0, 3) + t(1, -2);\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$x = \frac{y-3}{-2}$$

Ecuación general:

$2x + y - 3 = 0$

Ecuación explícita:

$y = -2x + 3$

36 Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas y general de los ejes de coordenadas.

Solución:

- Eje de abscisas, X

  Ecuación vectorial:

  $(x, y) = t(1, 0);\ t \in \mathbb{R}$

  Ecuaciones paramétricas:

  $$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$$

  Ecuación general:

  $y = 0$

- Eje de ordenadas, Y

  Ecuación vectorial:

  $(x, y) = t(0, 1);\ t \in \mathbb{R}$

  Ecuaciones paramétricas:

  $$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$$

  Ecuación general:

  $x = 0$

37 Dadas las siguientes rectas, escribe el tipo de ecuación, halla un punto, un vector director y la pendiente:

a) $(x, y) = (-4, 2) + t(5, 1),\ t \in \mathbb{R}$

b) $x + 3y + 4 = 0$ c) $y = -2x - 1$

d) $\left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 4 - 2t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$ e) $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{4}$

Solución:

a) Vectorial:

$A(-4, 2);\ \vec{v}(5, 1),\ m = \dfrac{1}{5}$

b) General:

$A(-4, 0);\ \vec{v}(3, -1),\ m = -\dfrac{1}{3}$

c) Explícita:

$A(0, -1);\ \vec{v}(1, -2),\ m = -2$

d) Paramétricas:

$A(2, 4);\ \vec{v}(1, -2),\ m = -2$

e) Continua:

$A(5, -2);\ \vec{v}(3, 4),\ m = \dfrac{4}{3}$

38 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-4, 5)$ y tiene pendiente -3

Solución:

$y = -3(x + 4) + 5$

$y = -3x - 7$

39 Dada la recta $r \equiv 3x - 5y + 8 = 0$

a) halla una recta s paralela a r que pase por el punto $P(3, 2)$

b) halla una recta t perpendicular a r que pase por el punto $P(-1, 2)$

Solución:

a) $3x - 5y + 1 = 0$ b) $5x + 3y - 1 = 0$

Elabora actividades para reforzar

40 Dados los vectores $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(-2, 1)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$

b) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

c) $2(\vec{u} + \vec{v})$

d) $\vec{v} - 2\vec{u}$

Solución:

a) $(4, -7)$ b) $(13, -14)$

c) $(2, -6)$ d) $(-8, 9)$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

41 Calcula x e y para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $2(x, y) = (4, 5)$ b) $-3(x, 2) = 4(9, 2y)$

Solución:

a) $x = 2, y = \dfrac{5}{2}$ b) $x = -12, y = -\dfrac{3}{4}$

42 Dados $\vec{u}(-2, 3)$, $\vec{v}(5, -1)$ y $\vec{w}(3, 4)$, calcula:

a) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Solución:

a) 45 b) -7

43 Dados los vectores $\vec{u}(3, 1)$ y $\vec{v}(2, 3)$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

$\vec{u} + \vec{v} = (5, 4)$

$\vec{u} - \vec{v} = (1, -2)$

$\alpha = 102° \, 5' \, 41''$

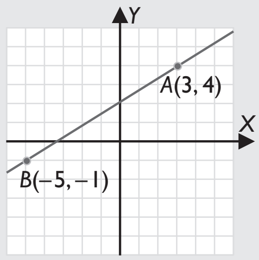
44 Dibuja las rectas que pasan por los puntos A y B, y calcula el vector director y la pendiente de la recta en cada caso:

a) $A(3, 4)$, $B(-5, -1)$

b) $A(-2, -3)$, $B(5, 6)$

Solución:

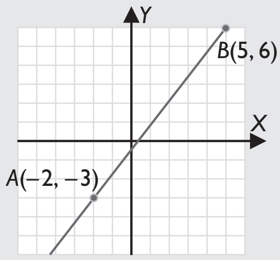
a)



$\vec{v}(8, 5)$

$m = \dfrac{5}{8}$

b)

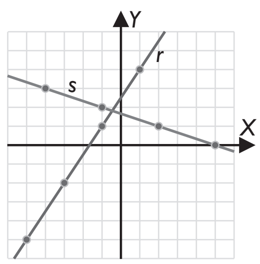


$\vec{v}(7, 9)$

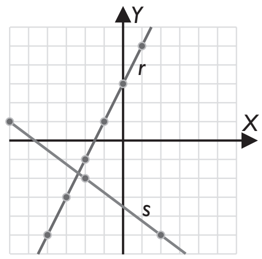
$m = \dfrac{9}{7}$

45 Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de las rectas dibujadas:

a)



b)



Solución:

a) • Recta r

$P(1, 4)$, $\vec{v}(2, 3)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (1, 4) + t(2, 3); \; t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3}$$

Ecuación general:

$3x - 2y + 5 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

• Recta s

$P(2, 1)$, $\vec{v}(3, -1)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (2, 1) + t(3, -1); \; t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1}$$

Ecuación general:

$x + 3y - 5 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$$

b) • Recta r

$P(0, 3)$, $\vec{v}(1, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (0, 3) + t(1, 2); \; t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$x = \frac{y-3}{2}$$

Ecuación general:

$2x - y + 3 = 0$

Ecuación explícita:

$y = 2x + 3$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.

• Recta s

$P(2, -5), \vec{v}(4, -3)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (2, -5) + t(4, -3);\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 4t \\ y = -5 - 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:

$\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-3}$

Ecuación general:

$3x + 4y + 14 = 0$

Ecuación explícita:

$y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

Elabora problemas

46 Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(7, x)$ y $\vec{v}(3, -4)$ sean perpendiculares.

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 21 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{21}{4}$

47 Halla el valor de x de forma que el producto escalar de los vectores $\vec{u}(-3, -2)$ y $\vec{v}(5, x)$ sea igual a 5

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \Rightarrow -15 - 2x = 5 \Rightarrow x = -10$

48 Escribe las coordenadas de un vector perpendicular a $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(5, -2)$ b) $\vec{v}(-3, -1)$

Solución:

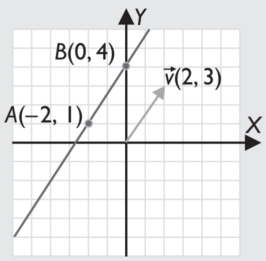
a) $\vec{n}(2, 5)$ b) $\vec{n}(1, -3)$

49 Dibuja las rectas que pasan por el punto A y tienen como vector director $\vec{v}$, y determina otro punto de la recta en cada caso:

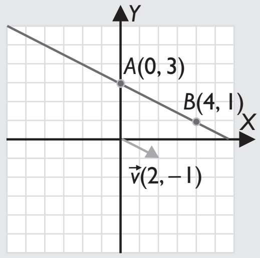
a) $A(-2, 1), \vec{v}(2, 3)$ b) $A(0, 3), \vec{v}(2, -1)$

Solución:

a)



b)



50 Dadas las siguientes rectas, escribe el tipo de ecuación, halla un punto, un vector director y la pendiente:

a) $y = -4x + 5$

b) $2x - 5y + 10 = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} x = -4 - 2t \\ y = \ \ 3 - 5t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

d) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{5}$

Solución:

a) Explícita:

$A(0, 5); \vec{v}(1, -4), m = -4$

b) General:

$P(-5, 0); \vec{v}(5, 2), m = \frac{2}{5}$

c) Paramétricas:

$P(-4, 3); \vec{v}(2, 5), m = \frac{5}{2}$

d) Continua:

$P(-5, -4); \vec{v}(3, 5), m = \frac{5}{3}$

51 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3, -5)$ y tiene pendiente 4

Solución:

Se aplica la forma punto-pendiente:

$y = 4(x + 3) - 5$

$y = 4x + 7$

52 Dada la recta $r \equiv 5x + 3y + 1 = 0$, halla una recta s paralela a r que pase por el punto $P(1, 3)$ y una recta t perpendicular a r que pase por el punto $P(-5, 2)$

Solución:

a) $5x + 3y - 14 = 0$ b) $3x - 5y + 25 = 0$

53 Se tiene que $A(1, 2)$ y se conocen los vectores $\overrightarrow{AB}(3, 1)$, $\overrightarrow{AC}(-4, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Calcula las coordenadas de los puntos B, C y D

Solución:

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (1, 2) + (3, 1) = (4, 3)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = (1, 2) + (-4, 1) = (-3, 3)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = (1, 2) + 2(3, 1) + (-4, 1) = (3, 5)$

54 Sean los vectores $\vec{u}(4, 3)$ y $\vec{v}(-5, x)$. Calcula el valor de x para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ sean ortogonales.

Solución:

$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3 + x)$

$\vec{u} - \vec{v} = (9, 3 - x)$

$-9 + 9 - x^2 = 0$

$x = 0$

55 Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(4, 3)$ y $\vec{v}(x, 1)$ formen un ángulo de 45°

Solución:

$4x + 3 = 5 \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{7} \qquad x_2 = -\dfrac{1}{7}$

56 Determina si los tres puntos siguientes están alineados:

a) $A(1, 2)$, $B(-2, -4)$ y $C(3, 6)$

b) $A(0, 1)$, $B(2, -5)$ y $C(-1, 4)$

Solución:

Para que los puntos A, B y C estén alineados, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser paralelos, es decir, sus coordenadas tienen que ser proporcionales.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 4)$, A, B y C están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (2, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3)$, A, B y C están alineados.

Elabora problemas de más nivel

57 Halla el valor de k para que los siguientes puntos estén alineados:

a) $A(1, 4)$, $B(-2, 1)$ y $C(3, k)$

b) $A(0, -1)$, $B(2, -5)$ y $C(-1, k)$

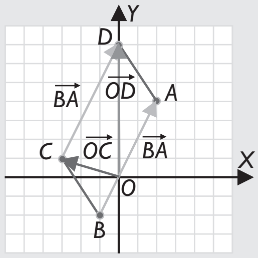
Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (2, k - 4) \Rightarrow \dfrac{-3}{2} = \dfrac{-3}{k-4} \Rightarrow k = 6$

b) $\overrightarrow{AB} = (2, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, k + 1) \Rightarrow \dfrac{2}{-1} = \dfrac{-4}{k+1} \Rightarrow k = 1$

58 Dados los puntos $A(2, 4)$, $B(-1, -2)$ y $C(-3, 1)$, determina las coordenadas del punto $D(x, y)$ de forma que los cuatro puntos formen un paralelogramo.

Solución:



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = (-3, 1) + (3, 6) = (0, 7)$

59 Calcula las coordenadas de un vector de módulo uno de la misma dirección y sentido que $\vec{v}(3, 4)$

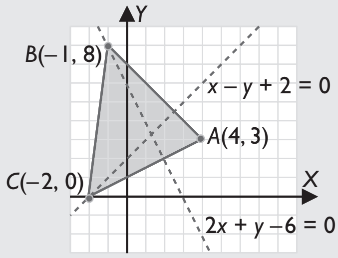
Solución:

Se divide entre el módulo, que es 5

$\vec{v}\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

60 Calcula los vértices del triángulo ABC, del que se conocen las coordenadas del punto $A(4, 3)$ y las ecuaciones de las alturas: $x - y + 2 = 0$, $2x + y - 6 = 0$

Solución:



La recta que contiene al lado AB pasa por A y es perpendicular a la recta $x - y + 2 = 0$

$A(4, 3)$, $m_{AB} = -1$

$y - 3 = -(x - 4)$

$x + y - 7 = 0$

Resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x + y - 7 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{array}\right\}$ se obtiene el vértice: $B(-1, 8)$

La recta que contiene al lado AC pasa por A y es perpendicular a la recta $2x + y - 6 = 0$

$A(4, 3)$, $m_{AC} = \dfrac{1}{2}$

$y - 3 = \dfrac{1}{2}(x - 4)$

$x - 2y + 2 = 0$

Resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{array}\right\}$ se obtiene el vértice: $C(-2, 0)$

© Grupo Editorial Bruño, S. L.